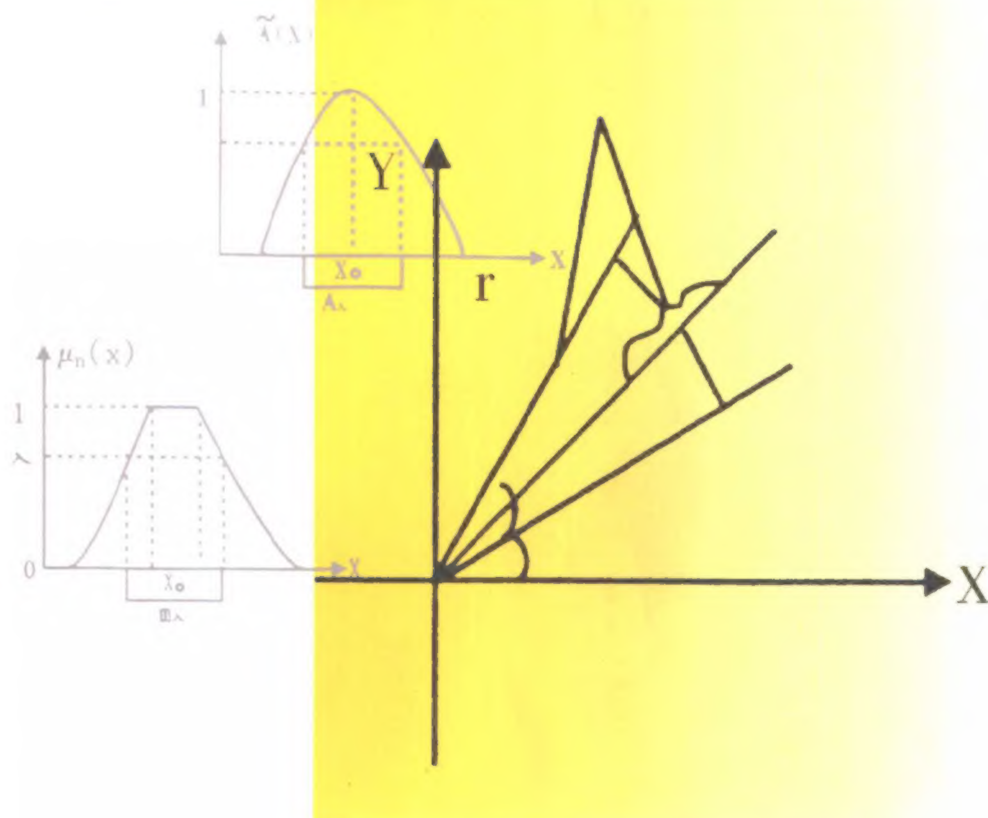
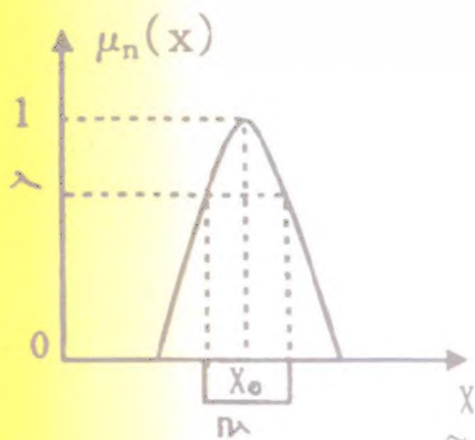
模糊复分析

马生全 曹 纯 著



民族出版社



责任编辑：曾晓武　李有明
封面设计：李　华



ISBN 7-105-04702-X / G·790
（汉355）　　定价：25.00元

模糊复分析

马生全　曹纯　著

民族出版社

图书在版编目(CIP)数据

模糊复分析/马生全,曹纯著. -北京:民族出版社,2001.10

ISBN 7-105-04702-X

Ⅰ.模… Ⅱ.①马… ②曹… Ⅲ.复分析 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第076376号

民族出版社出版发行

(北京市和平里北街14号 邮编100013)

http://www.e56.com.cn

民族出版社微机照排 迪鑫印刷厂印刷

各地新华书店经销

2001年12月第1版 2001年12月北京第1次印刷

开本:850×1168毫米 1/32 印张:7.875 字数:200千字

印数:0001—1000册 定价:25.00元

该书如有印装质量问题,请与本社发行部联系退换

(总编室电话:64212794;发行部电话:64211734)

前　言

自 1965 年美国 California 大学 L. A. Zadeh 教授提出模糊集论以来,在世界各国模糊学者的共同努力下,模糊数学理论及其应用研究取得了长足的进步,模糊数学业已成为一个具有广泛应用的新学科。其中模糊分析学的研究成果同样已相当丰富而深入,尤其是模糊实分析学的研究,在模糊数学界前辈吴从炘先生的带动下,其理论已相当深入。而关于模糊复分析的研究,目前尚不完善,目前还没有一本专门的著作系统地介绍该学科的内容。本书根据作者近年来的一些研究工作,综合国内外学者在此方面的研究,较系统地介绍模糊复分析分支的研究成果。虽然有些内容只是一些初步研究,但对于该学科的发展,将起到积极的作用。

本书试图以不大篇幅较系统地介绍目前国内外有关模糊复分析研究方面的概况,精炼地介绍了该领域的主要研究成果。在写作方式上,尽量较全面陈述主要结果,并不想对每个问题展开深入的讨论,为了节省篇幅,许多定理的证明均从略,有兴趣的读者可查阅书后所列参考文献。

全书共六章,第一章是预备知识;第二章全面介绍了

实模糊数的概念、模糊数的运算、模糊数的表现形式、模糊数的模糊距离、模糊数的模糊极限、模糊数空间及其中的运算与度量等;第三章介绍了模糊复集合、模糊复数、复模糊集、复模糊数的概念及基本运算,并讨论了它们相应的运算性质,为第四章打下基础;第四章介绍模糊复分析的基础,介绍了复模糊集值函数的基本概念(如极限、连续等)和基本运算、复模糊集值函数的微分(分一元与多元情形)、复模糊测度、复模糊集值函数的积分(定积分、曲线积分、曲面积分);第五章介绍了模糊复级数理论,讨论了实、复模糊数项级数与函数项级数的收敛性;第六章简单介绍了模糊数系的发展情况,并对模糊复分析需要进一步深入研究的问题进行了分析。

由于水平有限,书中难免有疏漏之处,敬请读者批评指正。

马生全

2001年7月27日

于西北民族学院

符号约定

$I(C)$:C 上闭复区间数全体

$I(C^n)$:C^n 上闭复区间向量全体

$F(C)$:C 上 F 复集之全体

$F_0(C)$:C 上有界闭 F 复数全体

$C^F(C)$:C 上复 F 集全体

$C^u(C)$:C 上复集合套全体

$C_0{}^F(C)$:C 上有界闭复 F 数全体

$I_1(C)$:圆楔形闭复区间数全体

$CF_0^*(C)$:C 上圆楔形复 F 数全体

$P(U)$:普通集 U 的幂集

$F(U)$:U 上 F 集全体

$I(R)$:R 上闭区间数全体

$F(R^+)$:R 上正 F 数全体

$F(R^-)$:R 上负 F 数全体

$F_0(R)$:R 上有界闭 F 数全体

$\overline{C}$:一般 F 复数集

$\overline{C}^*$:广义一般 F 复数集

E^1:模糊实数空间

$F^*(R^{\pm})$:R 上正(负)F 数全体

$K(X)$:[0,1]上集合套全体

符　号

$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\supseteq$	包含
$\supset$	真包含
$\forall$	全标量词,对所有
$\exists$	存在量词,至少存在一个
$\geqslant$	大于或等于
$>$	大于
$\cup$	并
$\cap$	交
max, $\vee$	取最大值
mix, $\wedge$	取最小值
$\triangleq$	被定义为
$=$	等于
$\Rightarrow$	蕴涵



作 者 简 介

马生全，男，回族，宁夏泾源县人，1962年3月出生，1985年毕业于西北民族学院数学专业并留校任教至今。现任西北民族学院数学系副教授，兼任中国模糊数学与模糊系统学会理事、甘肃省数学会理事、副秘书长等职。发表学术论文三十余篇，出版研究著作一部。曾获甘肃省三等科研成果奖两项、甘肃省优秀教学成果二等奖一项。为第五届甘肃省高等学校青年教师成才奖获得者。2001年3月荣获甘肃省优秀专家称号。主要研究方向为模糊系统理论及其应用。



作 者 简 介

曹纯，男，回族，天津市人。1968年毕业于兰州大学数学力学系。甘肃省数学会副理事长，西北民族学院教务处长，教授。多年来从事民族教育及教学管理工作，主要研究方向是模糊理论和数学教育，发表论文二十余篇。1985年参加研制的“计算机藏文信息处理系统”获甘肃省科技进步二等奖，1997年主持的《藏汉双语数学师资培养》获甘肃省教学成果二等奖，主持并完成了国家民委教育科学重点课题《藏汉双语数学教育研究》，主编了专著《藏汉双语数学教育研究》和全国第一部藏汉双语对照教材《高等代数》。

目　录

第一章　预备知识

§1.1　模糊集概念及运算

在经典集合论中一个元素 x 和一个集合 A 的关系只能有 $x \in A$ 和 $x \notin A$ 两种情况。然而,在现实客观世界中,大量存在着外延不分明的概念,即“亦此亦彼”现象,用经典集合论“非此及彼”的思想尚不能刻画所有元素和集合的关系,即不能简单地用“$x \in A$ 或 $x \notin A$”来表述,我们称这种外延不分明的概念为模糊概念。为了刻画模糊概念,1965 年 L. A. Zadeh 首先引入模糊集的概念,其基本思想是把经典集合中的绝对隶属关系灵活化,用普通集合的特征函数语言来讲就是:元素对“集合”的隶属度不再是局限于取 0 或 1,而是可以取 0 到 1 之间的任何一个实数。具体来讲我们有:

设给定论域 U 和一个资格函数把 U 中每个元素 x 和区间[0,1]中的一个数 $\mu_A(x)$ 结合起来。$\mu_A(x)$ 表示 x 在 A 中的资格的等级。此处的 A 即所谓 U 的一个模糊子集,而 $\mu_A(x)$ 相当于普通集的特征函数 $C_A(x)$,不过其取值不再是 0 和 1,而是扩展到[0,1]中的任一数值。

用数学语言我们给出:

定义 1.1.1　所谓给定论域(非空集)U 上的一个模糊子集 A,是指对任何 $x \in U$ 都有一个数 $\mu_A(x) \in [0,1]$ 与之对应,并称之

为 x 属于模糊子集 A 的隶属程度;即指的是映射

$$\mu_A : U \to [0,1];x \to \mu_A(x).$$

而映射 μ_A 称为 A 的隶属函数,以下以 A(x)简记 $\mu_A(x)$.

显然,当隶属函数仅取值于{0,1}时就成为通常的特征函数。即分明子集是模糊子集的特例。U 上的所有模糊子集全体构成的集族记为 F(U),U 上所有分明子集全体构成的集族记为 P(U)

定义 1.1.2 设 A,B∈F(U),若 ∀x∈U,B(x)≤A(x)

则称 A 包含 B,记为 B⊆A.

如果 A⊆B 且 B⊆A,则称 A 与 B 相等,记作 A=B

显然,包含关系"⊆"是 F 幂集 F(U)上的二元关系,它具有下列性质:

①自反性:∀A∈F(U),A⊆A;

②反对称性:若 A⊆B,B⊆A,则 A=B;

③传递性:若 A⊆B,B⊆C,则 A⊆C.

因此 (F(U),⊆)是偏序集.

定义 1.1.3 设 A,B∈F(U),分别称运算 A∪B,A∩B 为 A 与 B 的并集和交集。称 A^c 为 A 的补集,也称为 A 的余集。它们的隶属函数分别为:

$$(A\cup B)(x) = A(x) \vee B(x) = \max(A(x),B(x))$$

$$(A\cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = \min(A(x),B(x))$$

$A^c(x)=1-A(x)$

任给 $a,b\in[0,1]$,由于

$$0\leqslant a\vee b\leqslant 1,\quad 0\leqslant a\wedge b\leqslant 1,\quad 0\leqslant 1-a\leqslant 1$$

故对任何 $A,B\in F(U)$,有 $A\cup B\in F(U)$,$A\cap B\in F(U)$,$A^c\in F(U)$.

一般地,模糊集 A 与 B 的并、交和余的计算,按论域 U 为有限和无限分两种情况表示:

① 设论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,设有 F 集

$$A=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(u_i)}{u_i},\qquad B=\sum_{i=1}^{n}\frac{B(u_i)}{u_i}$$

则 $A\cup B=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(u_i)\vee B(u_i)}{u_i}$;

$$A\cap B=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(u_i)\wedge B(u_i)}{u_i};$$

$$A^c=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-A(u_i)}{u_i}.$$

② 设论域 U 为无限集,且 F 集

$$A=\int_{u\in U}\frac{A(u)}{u},\qquad B=\int_{u\in U}\frac{B(u)}{u}$$

则 $A\cup B=\int_{u\in U}\frac{A(u)\vee B(u)}{u}$;

$$A\cap B=\int_{u\in U}\frac{A(u)\wedge B(u)}{u};$$

$$A^c=\int_{u\in U}\frac{1-A(u)}{u}.$$

两个模糊集的并、交运算可以推广到任意多个模糊集上去。

定义 1.1.4 设 $A_t\in F(U)$,$t\in T$,T 为指标集.

对任意 $u\in U$,规定:

$(\bigcup_{t\in T}A_t)(u)=\bigvee_{t\in T}A_t(u)=\sup_{t\in T}A_t(u)$;

$(\bigcap_{t\in T}A_t)(u)=\bigwedge_{t\in T}A_t(u)=\inf_{t\in T}A_t(u)$;

称 $\bigcup_{t\in T}A_t$ 为 $\{A_t\}_{t\in T}$ 的并集,$\bigcap_{t\in T}A_t$ 为 $\{A_t\}_{t\in T}$ 的交集.

显然 $\bigcup_{t\in T}A_t,\bigcap_{t\in T}A_t\in F(U)$.

定理 1.1.1 $(F(U),\cup,\cap,c)$具有下列性质:

①幂等律: $A\cup A=A,A\cap A=A$;

②交换律: $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

③结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

④吸收律: $(A\cup B)\cap A=A,(A\cap B)\cup A=A$;

⑤分配律: $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

⑥零一壹律: $A\cup\varnothing=A,A\cap\varnothing=\varnothing$;

$A\cup U=U,A\cap U=A$;

⑦复原律: $(A^c)^c=A$;

⑧对偶律: $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

若 $B_t\in F(U),t\in T$,则上述性质⑤和⑧具有更一般形式:

⑤′ $$(\bigcup_{t\in T}B_t)\cap C=\bigcup_{t\in T}(B_t\cap C)$$

$$(\bigcap_{t\in T}B_t)\cup C=\bigcap_{t\in T}(B_t\cup C)$$

⑧′ $$(\bigcup_{t\in T}B_t)^c=\bigcap_{t\in T}B_t^c$$

$$(\bigcap_{t\in T}B_t)^c=\bigcup_{t\in T}B_t^c$$

由于$\varnothing,U\in F(U)$,故 $F(U)$具有最大元 U 及最小元$\varnothing$,因此说

明$(F(U),\cup,\cap,c)$是软代数而不是布尔代数,因为$(F(U),\cup,\cap,c)$不满足互补律。这是 F 集与普通集之间的显著不同之处。F 集上的补运算不满足互补律,其原因是 F 集没有明确的边界。

$A\cap A^c\neq\varnothing$,说明 A 与 A^c 交迭,但是:

$$\forall A\in F(U),A(u)\wedge A^c(u)\leqslant\frac{1}{2},\forall u\in U$$

同样,$A\cup A^c\neq U$,说明 $A\cup A^c$ 不一定完全覆盖 U,但有下述结论:

$$\forall A\in F(U),A(u)\vee A^c(u)\geqslant\frac{1}{2}\quad,\quad\forall u\in U.$$

例:设 $U=[0,1]$,$A(u)=u$,则 $A^c(u)=1-u$

$$(A\cup A^c)(u)=\begin{cases}1-u, & u\leqslant\frac{1}{2}\\ u, & u>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$(A\cap A^c)(u)=\begin{cases}u, & u\leqslant\frac{1}{2}\\ 1-u, & u>\frac{1}{2}\end{cases}$$

特别是:$(A\cup A^c)(\frac{1}{2})=(A\cap A^c)(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

由于 F 集的运算不满足互补律,所以它比普通集合更能客观的反映实际中大量存在着的模棱两可的情况。

定义 1.1.5 若 $A\in F(U)$满足条件:$A(x)=\lambda>0,A(y)=0$,当 $y\neq x$ 时,则称 A 为模糊点,记为 x_λ,点 x 称为是模糊点 x_λ 的承点,而 λ 叫做模糊点 x_λ 的高度。以 U^* 记 U 上所有模糊点之集.

显然,分明点 $x\in U$ 即为以 x 为承点,1 为高度的模糊集 x_1,

由于模糊点是特殊的模糊子集，所以当 $x_\lambda \subset B$，即 $B(x) \geqslant \lambda$ 时，我们称模糊点 x_λ 属于B，记作 $x_\lambda \in B$.

模糊点与模糊子集的属于关系是分明点、分明集属于关系的推广。而分明的属于关系还有下列形式的推广：

定义 1.1.6 若 $x_\lambda \in U^*$，$A \in F(U)$，且 $A(x)+\lambda>1$，则称 x_λ 重于A，记作：$x_\lambda \widetilde{\in} A$.

定理 1.1.2 设$\{A_\alpha : \alpha \in T\} \subset F(U)$，则模糊点 $x_\lambda \widetilde{\in} \bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha$ 当且仅当存在

$\alpha_0 \in T$，使 $x_\lambda \widetilde{\in} A_{\alpha_0}$.

证：若 $\exists\, \alpha_0 \in T$，使 $x_\lambda \widetilde{\in} A_{\alpha_0}$，则 $A_{\alpha_0}(x)>1-\lambda$，所以

$\sup_{\alpha \in T} A_\alpha(x)>1-\lambda$，即 $x_\alpha \widetilde{\in} \bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha$.

反之：若 $x_\lambda \widetilde{\in} \bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha$，则 $\sup_{\alpha \in T} A_\alpha(x)>1-\lambda$，

于是由上确界的性质有 $\alpha_0 \in T$ 使 $A_{\alpha_0}(x)>1-\lambda$，即 $x_\lambda \widetilde{\in} A_{\alpha_0}$.

证毕

例：取 $A_n=(1-\frac{1}{2n})^*$　　$(n=1,2,\cdots)$

则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=U$，对任何 $x \in U$

均有 $x_1 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

但对任何 n 均有 $x_1 \notin A_n$，此处，A_n 表示 $A_n(x) \equiv 1-\frac{1}{2n}$，$x \in U$. 这说明定理 1.1.2 对模糊点与模糊子集的属于关系是不成立的，但对于分明属于关系，这又是一条非常基本的性质，因此，在

模糊集合论中,仅有属于关系是不够的。

关于 F 集的运算,前面给出的 $\vee,\wedge$ 是 $[0,1]$ 上的二元运算,称 *Zadeh* 算子,实际中常用下列形式:

设 $A,B\in F(U)$,对 $u\in U$,规定:

$(A\cup B)(u)=A(u)\vee^{*}B(u)$

$(A\cap B)(u)=A(u)\wedge^{*}B(u)$

$\vee^{*},\wedge^{*}$ 为 $[0,1]$ 上二元运算,简称模糊算子。常用下列所列几种:

	算子名称	$\vee^{*}$	$\wedge^{*}$
1	*Zadeh*	$\vee$	$\wedge$
2	最大,乘积	$\vee$	$\cdot$
3	代数和与积	$\underset{+}{\wedge}$	$\cdot$
4	*Einstein*	$\overset{+}{\varepsilon}$	$\overset{\cdot}{\varepsilon}$
5	有界和与积	$\oplus$	$\odot$
6	*Hamacher*	$\overset{+}{\gamma}$	$\overset{\cdot}{\gamma}$
7	*Yager*	$\underset{\alpha}{\curlyvee}$	$\underset{\alpha}{\curlywedge}$

其中 令 $a=A(u)$, $b=B(u)$

$a\vee b=\max(a,b)$, $a\wedge b=\min(a,b)$

$a\cdot b$——普通实数乘法 ab;

$a\underset{+}{\wedge}b\triangleq a+b-ab$; $a\overset{+}{\varepsilon}b\triangleq\dfrac{a+b}{1+ab}$

$$a \dot{\varepsilon} b \triangleq \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}; \quad a \oplus b \triangleq \min(a+b,1);$$

$$a \odot b \triangleq \max(0, a+b-1); a \underset{\gamma}{+} b = \frac{a \underset{+}{\wedge} b - (1-\gamma)ab}{\gamma + (1-\gamma)(1-ab)}, \gamma \in [0, +\infty)$$

$$a \underset{\gamma}{\cdot} b \triangleq \frac{ab}{\gamma + (1-\gamma)(a \underset{+}{\wedge} b)}$$

当 $\gamma = 1$ 时，$(\underset{\gamma}{+}, \underset{\gamma}{\cdot})$化为$(\underset{+}{\wedge}, \cdot)$；

$\gamma = 2$ 时，$(\underset{\gamma}{+}, \underset{\gamma}{\cdot})$化为$(\overset{+}{\varepsilon}, \dot{\varepsilon})$

$$a \underset{\alpha}{\curlyvee} b \triangleq 1 \wedge (a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha \in [1, +\infty)$$

$$a \underset{\alpha}{\curlywedge} b \triangleq 1 - 1 \wedge [(1-a)^\alpha + (1-b)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}};$$

当 $\alpha = 1$ 时，$(\underset{\alpha}{\curlyvee}, \underset{\alpha}{\curlywedge})$ 成为$(\oplus, \odot)$，

$\alpha \to +\infty$时$(\underset{\alpha}{\curlyvee}, \underset{\alpha}{\curlywedge})$成为$(\vee, \wedge)$

此外，还有 *Schweizer − Sklard* 算子，*Kaufmann* 算子等，这里不一一列举.

算子$\wedge^*$中的$(\cdot)$、$(\odot)$、$(\wedge)$运算，各以不同程度表示逻辑上的"与"运算，当 A, B 中有一个是普集合时，有 $A(u) \cdot B(u) = A(u) \odot B(u) = A(u) \vee B(u)$，因此，$F$ 集运算$\cdot$、$\odot$、$\wedge$都可以看成普通集合交运算的推广。

对偶地，算子$\vee^*$中的$(\underset{+}{\wedge})$、$(\oplus)$、$(\vee)$运算，也各以不同程度表示逻辑"或"运算，当 A, B 中有一个是普通集合时，有

$$A(u) \underset{+}{\wedge} B(u) = A(u) \oplus B(u) = A(u) \vee B(u)$$

因此,F 集运算 $\underset{+}{\wedge}$、$\oplus$、$\vee$ 都可以看成普通集"并"运算的推广。

以上所列举的都是一些具体的算子,概括它们的共性,可总结为更一般的形式。

定义 1.1.7 映射 $T:[0,1]^2\to[0,1]$,

如果 $\forall a,b,c\in[0,1]$

满足条件:

(1)交换律 $T(a,b)=T(b,a)$

(2)结合律 $T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))$;

(3)单调性 若 $a_1\leqslant a_2,b_1\leqslant b_2$,

则 $T(a_1,b_1)\leqslant T(a_2,b_2)$;

(4)边界条件 $T(1,a)=a$

则称为 T 三角模,也称为 T 范数.

定义 1.1.8 映射 $S:[0,1]^2\to[0,1]$,

如果 $\forall a,b,c\in[0,1]$满足条件:

(1)交换律:$S(a,b)=S(b,a)$;

(2)结合律:$S(S(a,b),c)=S(a,S(b,c))$;

(3)单调性:若 $a_1\leqslant a_2,b_1\leqslant b_2$,则 $S(a_1,b_1)\leqslant S(a_2,b_2)$

(4)边界条件:$S(a,0)=a$

则称为 S 三角模,或称为 S 范数。

T 三角模 T 和 S 三角模 S 统称为三角范算子。

三角范算子具有下列性质

1° 三角范算子 T 和 S 是对偶算子。

T 范算子是广义的"交"运算,S 范算子是广义的"并"运算.

2° T 是 T 范数,则 $\forall a,b,\in[0,1]$有 $0\leqslant T(a,b)\leqslant a\wedge b$;

$T(a,0)-0$

3° S 是 S 范数,则 $\forall a,b\in[0,1]$ 有 $a\vee b\leqslant S(a,b)\leqslant 1$; $S(a,1)-1$

4° $T(0,0)=0, T(1,1)=1; S(0,0)=0, S(1,1)=1$

定义 1.1.9 给定模糊算子“ * ”,称点集

$\sigma(*)=\{(x,y)\mid x*y=0$ 或 $x*y=1\}$ 为模糊算子“ * ”的清晰域。

清晰域内的点,对应着运算结果是清晰的,即确定的是属于与不属于。因此,算子的清晰域是刻划模糊算子模糊程度的一个尺度。

定义 1.1.10 设 $A\in F(U), \lambda\in[0,1]$,记:

(1) $A_\lambda=\{u\mid u\in U, A(u)\geqslant\lambda\}$,称 A_λ 为 A 的 λ—截集,λ 称为阈值(或置信水平);

(2) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\{u\mid u\in U, A(u)>\lambda\}$,称 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 为 A 的 λ—强截集.

定义 1.1.11 设 $A\in F(U)$,记

$$\mathrm{suppA}=\{u\mid u\in U, A(u)>0\};$$

$$\mathrm{KerA}=\{u\mid u\in U, A(u)=1\};$$

分别称 suppA、KerA 为 A 的支集与 A 的核。当 $KerA\neq\varnothing$ 时,称 A 为正规 F 集.

F 集的 λ—截集具有下列性质: 对 $\forall\lambda\in[0,1]$.

1° 设 $A,B\in F(U)$,则 $(A\cup B)_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda$; $(A\cap B)_\lambda=A_\lambda$

$\cap B_\lambda$

$(A \cup B)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$；$(A \cap B)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cap B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$

2° 若$\{A_t \mid t \in T\} \subseteq F(U)$，则 $\bigcup\limits_{t \in T}(A_t)_\lambda \subseteq (\bigcup\limits_{t \in T} A_t)_\lambda$；$\bigcap\limits_{t \in T}(A_t)_\lambda = (\bigcap\limits_{t \in T} A_t)_\lambda$；$(\bigcup\limits_{t \in T} A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup\limits_{t \in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$；

$(\bigcap\limits_{t \in T} A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcap\limits_{t \in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$

3° 设 $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$，$A \in F(U)$，若，$\lambda_1 \leqslant \lambda_2$，则 $A_{\lambda_2} \subseteq A_{\lambda_1}$；$A_{\underset{\cdot}{\lambda}_2} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}_1}$

4° 设 $\forall t \in T$，$\lambda_t \in [0,1]$，则 $A_{(\bigvee\limits_{t \in T}\lambda_t)} = \bigcap\limits_{t \in T} A_{\lambda_t}$；$A_{(\bigwedge\limits_{t \in T}\underset{\cdot}{\lambda}_t)} = \bigcup\limits_{t \in T} A_{\underset{\cdot}{\lambda}_t}$

5° $(A^c)_\lambda = (A_{1-\underset{\cdot}{\lambda}})^c$；　$(A^c)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (A_{1-\lambda})^c$

§ 1.2　模糊集的分解定理与表现定理

定义 1.1.12　设 $\lambda \in [0,1]$，$A \in F(U)$，记

$$(\lambda A)(u) = \lambda \wedge A(u)$$

称 λA 为 λ 与 A 的数积.

显然，$\lambda A \in F(U)$. 当 A 为普通集时，

$(\lambda A)(u) = \lambda \wedge C_A(u)$.

这里 $C_A(u)$ 为 A 的特征函数，而 λA 仍是 F 集.

λ 与 F 集的数积 λA 具有下列性质：

(1)若 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$，则 $\lambda_1 A \subseteq \lambda_2 A$；

(2)若 $A \subseteq B$,则 $\lambda A \subseteq \lambda B$

定理 1.1.3 (F 集的分解定理Ⅰ)设 $A \in F(U)$,则

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda A_\lambda)$$

证明:因 A_λ 为普通集,且其特征函数

$$C_{A_\lambda}(u) = \begin{cases} 1, & A(u) \geqslant \lambda \\ 0, & A(u) < \lambda \end{cases}$$

于是,对 $\forall u \in U$,有

$$\Big(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_\lambda\Big)(u) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge C_{A_\lambda}(u))$$

$$= \max\Big\{\bigvee_{\lambda \leqslant A(u)} (\lambda \wedge C_{A_\lambda}(u)), \bigvee_{A(u) < \lambda} (\lambda \wedge C_{A_\lambda}(u)\Big\}$$

$$= \max\Big\{\bigvee_{\lambda \leqslant A(u)} (\lambda \wedge 1), \bigvee_{A(u) < \lambda} (\lambda \wedge 0)\Big\}$$

$$= \max\Big(\bigvee_{\lambda \leqslant A(u)} \lambda, \bigvee_{A(u) < \lambda} 0,\Big)$$

$$= \max(A(u), 0) = A(u)$$ 证毕

定理 1.1.4 (F 集的分解定理Ⅱ)设 $A \in F(U)$,则 $A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$

推论:$\forall u \in U, A(u) = \sup\{\lambda \mid u \in A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\}$

证明方法与定理 1.1.3 相仿.

定理 1.1.5 (F 集的分解定理Ⅲ) 设 $A \in F(U)$,若存在集合映射

$$H:[0,1] \to P(U)$$

$$\lambda \to H(\lambda),$$

使得 $\forall \lambda \in [0,1], A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$ 则:

①$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda)$

②$\lambda_1<\lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_1)\supseteq H(\lambda_2)$

③$A_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$, $\lambda\neq 0$

$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha)$, $\lambda\neq 1$

证明参见文献[78]

定义 1.1.13 若集值映射

$$H:[0,1]\rightarrow P(U) \quad \text{满足}$$

$\forall \lambda_1,\lambda_2\in[0,1],\lambda_1<\lambda_2\Rightarrow H(\lambda_1)\supseteq H(\lambda_2)$

则称 H 为 U 上的集合套.

U 上所有集合套构成的集合,记作 $\mathscr{U}(U)$.

定义 1.1.14 在 $\mathscr{U}(U)$中,规定运算"并"、"交"、"余"如下:

并: $(H_1\cup H_2)(\lambda)\triangleq H_1(\lambda)\cup H_2(\lambda)$;

$(\bigcup_{t\in T} H_t)(\lambda)\triangleq \bigcup_{t\in T} H_t(\lambda)$;

交: $(H_1\cap H_2)(\lambda)\triangleq H_1(\lambda)\cap H_2(\lambda)$;

$(\bigcap_{t\in T} H_t)(\lambda)\triangleq \bigcap_{t\in T} H_t(\lambda)$;

余: $H^c(\lambda)\triangleq(H(1-\lambda))^c$

定理 1.1.6 $(\mathscr{U}(U),\cup,\cap,c)$是一个完备的软代数.

定理 1.1.7(F 集的表现定理Ⅰ) 设 $H\in\mathscr{U}(U)$,则

$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$是 U 上一个 F 集,记作 A.并且 $\forall\alpha,\lambda\in[0,1]$:

①$A_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$, $\lambda\neq 0$;

②$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha)$, $\lambda\neq 1$.

推论:设 $H\in\mathscr{U}(U)$,记 $A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$,则

①$\forall\lambda\in[0,1],A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda$;

②$A(u)=\sup\{\lambda \mid u\in H(\lambda),\lambda\in[0,1]\}$

定理 1.1.8(F 集的表现定理Ⅱ)　令

$$\phi: \mathscr{U}(U) \to F(U)$$

$$H \mapsto \phi(H) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda)$$

则 ϕ 是从$(\mathscr{U}(U), \cap, \cup, c)$到$(F(U), \cup, \cap, c)$上的同态满射,并且 $\forall \lambda \in [0,1]$,有:

①$\phi(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq \phi(H)_{\lambda}$;

②$\phi(H)_{\lambda} = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha)$;

③$\phi(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha)$;

关于模糊集的扩张原理见下章有关内容.

§1.3　模糊代数简介

1.3.1　格及其基本性质

定义 1.3.1　称$(K, \leqslant)$为予序集,若 K 上的关系"$\leqslant$"满足以下两条件

(1)自反性:$\alpha \leqslant \alpha$

(2)传递性:$\alpha \leqslant \beta, \beta \leqslant \gamma \Rightarrow \alpha \leqslant \gamma$

称$(P, \leqslant)$为偏序集,如果它是予序集,且满足:

(3)对称性:$\alpha \leqslant \beta, \beta \leqslant \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$

设$(K, \leqslant)$是予序集,如果存在 $a \in K$,使对任意 $b \in K$,有 $a \leqslant b$,则称 a 为 K 的最小元素.若存在 $a \in K$,使对任意 $b \in K$,有

$b \leqslant a$,则称 a 为 K 的最大元素.若最大元素和最小元素是惟一的,记 0 为最小元素,1 为最大元素.

设$(P, \leqslant)$为偏序集,则最小元素和最大元素是惟一的。若存在 $a \in P$,使对任意 $b \in P(b \neq a)$,$b \leqslant a$ 不成立,称 a 为P 的极小元素。如果 P 中有最小元素 0,a 是$P-\{0\}$中的极小元素,称 a 为原子.若存在 $a \in P$,使对任意 $b \in P(b \neq a) a \leqslant b$ 不成立,称 a 为P 的极大元素.如果 P 中有最大元素 1,a 是$P-\{1\}$中的极大元素,称 a 为反原子.

设$(P, \leqslant)$是偏序集,$H \subset P$,若存在 $u \in P$, $\forall h \in H$,使 $h \leqslant u$,称 u 为H 的上界.如果 H 的上界集合有一个最小元素,称它为 H 的最小上界,记为 $supH$ 或 $\bigvee\limits_{h \in H} h$.若存在 $v \in P$, $\forall h \in H$, $v \leqslant h$,称 v 为H 的下界.如果 H 的下界集合有一个最大元素,称它为 H 的最大下界,记为 $infH$ 或 $\bigwedge\limits_{h \in H} h$.特别关于两个元素 a 和b 的最小上界记为 $a \vee b$,最大下界记为 $a \wedge b$.

$(P, \leqslant)$是偏序集,最小上界和最大下界有以下性质:

(1)$a \wedge b \leqslant a, a \wedge b \leqslant b, \quad a \leqslant a \vee b, b \leqslant a \vee b$;

(2)$a \wedge b = b \wedge a, \quad a \vee b = b \vee a$;

(3)$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a$;

(4)$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a, \quad a \leqslant b \Leftrightarrow a \vee b = b$

(5)$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, \quad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$;

(6)$a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a$

定义 1.3.2 偏序集$(L, \leqslant)$称为格,如果对任意 $\alpha, \beta \in L$,有 $\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta \in L$.

定理 1.3.1 集 L 是格的充分必要条件为:

(1)存在两种运算$\vee$,$\wedge$,使对任意 $a,b\in L$,有 $a\wedge b\in L$,$a\vee b\in L$

(2)$a\vee b=b\vee a$,$a\wedge b=b\wedge a$　　　　(交换律)

(3)$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$,$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$

(结合律)

(4)$a\wedge(a\vee b)=a$,$a\vee(a\wedge b)=a$　　　　(吸收律)

定理 1.3.2　设$(L,\leqslant)$是格,则有性质:

(1)$b\leqslant c\Rightarrow a\wedge b\leqslant a\wedge c$,$a\vee b\leqslant a\vee c$;

(2)$a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$,

$a\wedge(b\vee c)\geqslant(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$;

(3)$a\leqslant c\Leftrightarrow a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c$

$\Leftrightarrow a\wedge(b\vee c)\geqslant(a\wedge b)\vee c$

定义 1.3.3　若格$(L,\leqslant)$满足分配律,即;$\forall a,b,c\in L$,有

$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

则称为分配格.

定理 1.3.3　若$(L,\leqslant)$是分配格,当 $a\wedge b=a\wedge c$,$a\vee b=a\vee c$ 时,有 $b=c$.

定义 1.3.4　设$(L,\leqslant)$是格,若$\forall H\subset L$,H 有最大下界和最小上界,称$(L,\leqslant)$为完备格.

若$\forall H\subset L$ 有

$$a\vee(\bigwedge_{h\in H}h)=\bigwedge_{h\in H}(a\vee h)$$

$$a \wedge (\bigvee_{h \in H} h) = \bigvee_{h \in H} (a \wedge h)$$

称$(L, \leqslant)$是无穷可分配的完备格.

定义 1.3.5 设 L 是完备格,$a \in L$,$A \subset L$,称 A 为 a 的一个极小族,如果 A 满足条件:

(1)$\sup A = a$

(2)若 $B \subset L$,$\sup B = a$,则 $\forall x \in A$,$\exists y \in B$,使 $y \geqslant x$;

称 A 为 a 的一个极大族,如果 A 满条件:

(1)$\inf A = a$

(2)若 $B \subset L$,$\inf B = a$,则 $\forall x \in A$,$\exists y \in B$,使 $y \leqslant x$.

定理 1.3.4 设$(L, \leqslant)$为完备分配格,则 $\forall a \in L$,存在 a 的极小族和极大族.

定理 1.3.5 设$(L, \leqslant)$是完备格,$a \in L$,则 a 的任意多个极小放(极大族)的并集,仍为 a 的一个极小族(极大族).

定义 1.3.6 格$(L, \leqslant)$称为稠密的,如果 $\forall \alpha, \beta \in L$,当 $\alpha < \beta$ 时,存在 $\lambda \in L$,使得 $\alpha < \lambda < \beta$.

稠密的完备格具有下列简性:

$\vee \{\alpha; \alpha < \beta\} = \beta$

$\wedge \{\alpha; \alpha > \beta\} = \beta$

定义 1.3.7 设$(K, \leqslant)$是予序集,映射 $N: K \to K$ 称为保序映射,如果 $a \leqslant b$($\forall a, b \in K$)时,有 $N(a) \leqslant N(b)$;若 $a \leqslant b$($\forall a, b \in K$)时,有 $N(b) \leqslant N(a)$,称 N 为逆序映射。如果逆序映射 N 满足对合律,即 $N(N(a)) = a$,称 N 为伪补。

如果 N 为偏序集$(P, \leqslant)$上的伪补,P 有最小元素 0 和最大

元素 1,则 $N(0)=1, N(1)=0$

定理 1.3.6　设 N 是格$(L,\leqslant)$上的伪补,则

$N(a \vee b)=N(a) \wedge N(b)$

$N(a \wedge b)=N(a) \vee N(b)$

定义 1.3.8　设$(L,\leqslant)$是格,有最小元素 0 和最大元素 1,$\forall a \in L$,若存在 $a' \in L$,使 $a \wedge a'=0, a \vee a'=1$

称 L 为有伪格,a'称为 a 的补。有补的分配格称为布尔代数。

定理 1.3.7　L 是布尔代数的充分必要条件为:

存在两种运算 ∨ 和 ∨ ,且满足:

(1)$a \wedge b=b \wedge a, a \vee b=b \vee a$(交换律)

(2)$a \vee (b \wedge c)=(a \vee b) \wedge (a \vee c)$;$a \wedge (b \vee c)=(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$(分配律)

(3)存在 1 和 0,使 $a \vee 0=a, a \wedge 1=a$(存在单位元素)

(4)$\forall a \in L$,存在 $a' \in L$,使 $a \wedge a'=0, a \vee a'=1$(互补律)

1.3.2　模糊线性空间及相关概念和性质

定理 1.3.8　设 X 是数域 K(指实数域 R 或复数域 C)上的线性空间,$f: X \times X \rightarrow X$;$g: K \times X \rightarrow X$　分别是 X 上的加法和数乘映射,则有

$$f(A \times B)(x)=(A+B)(x)$$
$$=\operatorname*{Sup}_{s+t=x} min(A(s), B(t))$$

$$g(\{k\} \times A)(x)=(kA)(x)$$

$$\begin{cases} A(x/k), k \neq 0 \\ (oA)(x) = \begin{cases} \sup\limits_{t \in X} A(t), x = \theta \\ 0, x \neq \theta, \end{cases} \end{cases}$$

特别对 $A = x_\lambda, B = y_\mu$，又有

$x_\lambda + y_\mu = (x + y)_{min(\lambda,\mu)}$，

$kx_\lambda = (kx)_\lambda$

此定理证明可直接由扩张原理推得。

定义 1.3.9 设 X 是线性空间，A 是 X 中的模糊子集，称 A 是

(1)凸模糊集，若对任何 $\lambda \in [0,1]$，$\lambda A + (1-\lambda)A \subset A$；

(2)平衡的模糊集，若对任何 $|k| \leqslant 1$ 均有 $kA \subset A$；

(3)模糊线性子空间，若对任何 $s, t \in K$，$sA + tA \subset A$；

(4)吸收的模糊集，若 $X = \bigcup\limits_{k>0} kA$；

(5)绝对凸模糊集，若 A 既是凸的又是平衡的。

(6)α－凸模糊集，若对任何 $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$，$\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha = 1$ 均有

$\lambda_1 A + \lambda_2 A \subset A$；

(7)绝对 α－凸模糊集，若对任何 $|\lambda_1|^\alpha + |\lambda_2|^\alpha \leqslant 1$，均有

$\lambda_1 A + \lambda_2 A \subset A$；

(8)凹模糊集，若存在 $t > 0$，使 $A + A \subset tA$

定理 1.3.9 设 X 是线性空间，A 是 X 中的模糊子集，则下述条件等价：

(1)A 是凸模糊集；

(2)$A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant min(A(x), A(y))$，$x, y \in X$，$\lambda \in [0,1]$；

(3)A_r(即 A 的 r—截集)均为凸集，$r\in[0,1]$；

(4)A 的 r—强截集均凸集，$r\in[0,1]$；

(5)对任何 $x_\alpha, y_\beta \in A, \lambda \in [0,1]$, 均有

$\lambda x_\alpha + (1-\lambda) y_\beta \in A$；

(6)对任何 $x_\alpha, y_\beta \widetilde{\in} A, \lambda \in [0,1]$，均有

$(\lambda x + (1-\lambda) y)_{max(\alpha,\beta)} \widetilde{\in} A$

定理 1.3.10　设 X 是线性空间，A 是 X 中的模糊子集，则下述条件等价：

(1)A 是平衡的模糊集；

(2)对任何 $|k|\leqslant 1$，有 $A(kx)\geqslant A(x)$；

(3)对任何 $r\in[0,1]$，A_r 均为平衡集；

(4)对任何 $r\in[0,1]$，A 的 r—强截集均为平衡集；

(5)对任何 $x_\alpha \in A$，$|k|\leqslant 1$，有 $kx_\alpha \in A$；

(6)对任何 $x_\alpha \widetilde{\in} A$，$|k|\leqslant 1$，有 $kx_\alpha \widetilde{\in} A$。

定理 1.3.11　设 X 是线性空间，A 是 X 中的模糊子集，则下述条件等价：

(1)A 是模糊线性子空间；

(2)对任何 $s,t\in K$，$A(sx+ty)\geqslant min(A(x),A(y))$；

(3)对任何 $r\in[0,1]$，A 的 r—截集均是线性子空间；

(4)对任何 $r\in[0,1]$，A 的 r—强截集均是线性子空间；

(5)对任何 $x_\alpha, y_\alpha \in A, s,t\in K$ 有 $sx_\alpha + ty_\beta \in A$；

(6)对任何 $x_\alpha, y_\beta \widetilde{\in} A, s,t\in K$，有 $(sx+ty)_{max(\alpha,\beta)} \widetilde{\in} A$

定理 1.3.12　设 X 是线性空间，则模糊子集 A 是吸收的充

分必要条件为对任何$x\in X$，$\sup\limits_{k>0}A(kx)=1$

定理 1.3.13 设 X 是线性空间，A 是 X 中的模糊子集，$\lambda\in[0,1]$，则下述条件等价：

(1)对任何 $x\in X$，存在 $\varepsilon>0$，使当$|t|<\varepsilon$ 时，$tx_\lambda\widetilde{\in}A$；

(2)$\sigma_{1-\lambda}(A)=\{x:A(x)>1-\lambda\}$是吸收集，(即对任何 $x\in X$，有 $\varepsilon>0$ 使得 $tx\in\sigma_{1-\lambda}(A)$，当$|t|<\varepsilon$ 时)。

定理 1.3.14 设 X,Y 为同一数域K 上的线性空间，f 是从 X 到 Y 的线性映射，则对任何 $A,B\in F(X)$，$k\in K$，有

(1)$f(A+B)=f(A)+f(B)$；

(2)$f(kA)=kf(A)$

推论：设 X,Y 是线性空间，$f:X\to Y$ 是线性映射，若 A 是 X 中的凸(平衡、吸收)模糊集，则 $f(A)$是 Y 中的凸(平衡、吸收)模糊集。

定义 1.3.10 设 A 是线性空间 X 中的模糊子集，则 A 的凸包 $co(A)$和平衡包 $ba(A)$分别是包含 A 的最小凸模糊集和最小平衡模糊集。

定理 1.3.15 设 A 是线性空间 X 中的模糊子集，则

(1)A 的凸 $co(A)$存在，且

$$co(A)=\bigcup\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_iA\mid\lambda_i\geqslant0,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,n=1,2,\cdots\};$$

(2)A 的平衡包 $ba(A)$存在，且

$$ba(A)=\bigcup_{|k|\leqslant1}kA$$

推论：若 A 是线性空间 X 中的模糊集，则

$$co(A+A)=co(A)+co(A)$$

下面简要介绍线性代数中模糊集的一些概念和结论。

称数域 K 上的线性空间 X 为代数,若 X 中还有另外的运算

$h: X \times X \rightarrow X; (x, y) \rightarrow xy,$

称为是乘法,满足

(1)$(X, +, \cdot)$构成环;

(2)$k(xy) = (kx)y = x(ky), \forall k \in K, x, y \in X.$

定理 1.3.16 设 X 是数域 K 上的代数,A, B 是 X 上的模糊集,则 A, B 的乘积为

$$(AB)(x) = \begin{cases} \underset{st \quad x}{Sup} \, min(A(s), B(t)), x \in h(X \times X) \\ 0, x \overline{\in} h(X \times X), \end{cases}$$

特别对模糊点 x_λ, y_μ 有

$x_\lambda y_\mu = (xy)_{min(\lambda, \mu)}$

定义 1.3.11 代数 X 中的模糊集 U 称为是幂等的,若 $UU \subset U$, U 称为是 m - 凸的,若 U 既是凸模糊集,又是幂等的模糊集;U 称为是绝对 m—凸的,若 U 既是 m—凸的,又是平衡的。

定理 1.3.17 幂等集的凸包是 m—凸的。

注:本节详细内容参见文献[13][33][37]有关内容。

§1.4 模糊拓扑学简介

本节简单介绍模糊拓扑学的基本概念及有关结论。

设 X 为非空普通集合,$F(X)$是 X 上全体模糊集之族。

定义 1.4.1 若 $\delta \subset F(X)$,且 δ 满足条件:

(1)$\varnothing, X \in \delta$

(2)$A,B\in\delta\Rightarrow A\cap B\in\delta$

(3)$A_t\in\delta(t\in T)\Rightarrow\bigcup_{t\in T}A_t\in\delta$

则称 δ 为 X 上的一个模糊拓扑,简称 F 拓扑。称(X,δ)为 F 拓扑空间。δ 中的F 集称为δ—开集,δ—开集的余集称为 δ—闭集。

定义 1.4.2 设(X,δ)是 F 拓扑空间,$A\in F(X)$,则称

$A^{\circ}=\bigcap\{B;B\in\delta\ \ 且\ B\subset A\}$

为 A 的内部。

显然 A°是包含于A 的最大开集。

定义 1.4.3 设(X,δ)是 F 拓扑空间,$A\in F(X)$,则称

$A\ =\bigcap\{B;B^{c}\in\delta\ \ 且\ A\subset B\}$

为 A 的闭包。

定理 1.4.1 设(X,δ)是 F 拓扑空间,$A,B\in F(X)$,则

(1)$\varnothing^{-}=\varnothing$

(2)$A\subset A^{-}$

(3)$(A\cup B)^{-}=A\ \cup B^{-}$

(4)$A^{-}\ =A$

(5)$X^{\circ}=X$

(6)$A^{\circ}\subset A$

(7)$(A\cap B)^{\circ}=A^{\circ}\cap B^{\circ}$

(8)$A^{\circ\circ}=A^{\circ}$

(9)$((A^{c})^{-})^{c}=A^{\circ}$

(10)$A^{-\circ-\circ}=A^{-\circ}$

(11)$A^{\circ-\circ-}=A^{\circ-}$

定理 1.4.2 设(X,δ)是 F 拓扑空间,$A\in F(X)$,则对 A 以

任何顺序依次施行取闭包、取内部以及取余集的运算任意多次，最多可得出 14 个不同的 F 集来。

定义 1.4.4 设(X,δ)是 F 拓扑空间，x_λ 是 F 点，$A\in F(X)$。若存在闭集 B 使 $A\subset B$，且 $\lambda>B(x)$，则称 A 为 x_λ 的远域，x_λ 的全体远域之集记作 $\eta(x_\lambda)$，全体闭远域之集记作 $\eta^-(x_\lambda)$。

定理 1.4.3 设(x,δ)是 F 拓扑空间，x_λ 是 F 点，则

(1) $\forall A\in\eta(x_\lambda),x_\lambda\notin A$

(2) $A\in\eta(x_\lambda),B\subset A\Rightarrow B\in\eta(x_\lambda)$

(3) $A,B\in\eta(x_\lambda)\Rightarrow A\cup B\in\eta(x_\lambda)$

(4) $\forall A\in\eta(x_\lambda),\exists B\in\eta(x_\lambda),A\subset B$，且对任一 F 点 y_μ，当 $y_\mu\notin B$ 时，$B\in\eta(y_\mu)$

(5)若 $\lambda<\mu\leqslant 1$，则 $\eta(x_\lambda)\subset\eta(x_\mu)$

反过来，若存在映射 $\eta:P(X)\to\{\xi,\xi\subset F(X)\}$，且 η 满足上述条件，则令 $\delta=\{A^c:\forall x_\lambda\in P(X)有\ x_\lambda\notin A\Rightarrow A\in\eta(x_\lambda)\}$，$\delta$ 就构成 X 上的一个 F 拓扑，且在 F 拓扑空间(X,δ)中，任一 F 点 x_λ 的远域系恰为 x_λ 的映射 η 之下的像 $\eta(x_\lambda)$。

定理 1.4.4 设(X,δ)是 F 拓扑空间，$A\in F(X)$，$x_\lambda\in P(X)$，则 $x_\lambda\in A^-$ 的充要条件是 $\forall B\in\eta(x_\lambda),A\not\subset B$

定义 1.4.5 设(X,δ)是 F 拓扑空间，$A\in F(X)$，$x_\lambda\in P(X)$，若 $\forall B\in\eta(x_\lambda)$都有 $A\not\subset B$，则称 x_λ 是 A 的附着点。

定理 1.4.5 设(X,δ)是 F 拓扑空间，$A\in F(X)$，则 A 的闭包等于 A 的全体附着点的并，即

$A^-=\bigcup\{x_\lambda;x_\lambda 是 A 的附着点\}$

定义 1.4.6 设(X,δ)是 F 拓扑空间，$\beta\subset\delta$，如果 δ 中每个

开集都可表示为β中若干个开集之并,则称β为δ的一个基。又设$\xi\subset\delta$,若ξ中各集的有限交构成的集族成为δ的一个基,则ξ称为δ的子基。若δ有可数基,则称(X,δ)是满足第二可数公理的空间,或简称为C_{II}空间。

定义 1.4.7 设(X,δ)为F拓扑空间,$x_\lambda\in P(X)$,$\eta_0\subset\eta(x_\lambda)$,若$\forall A\in\eta(x_\lambda)$,存在$B\in\eta_0$,使$A\subset B$,则称$\eta_0$为$x_\lambda$的局部远域基,或简称远域基。若$\forall x_\lambda\in P(X)$,$x_\lambda$都有可数的远域基,则称$(X,\delta)$为满足第一可数公理的空间,或简称为$C_{\mathrm{I}}$空间。

定理 1.4.6 若(X,δ)为C_{II}空间,则它也是C_{I}空间。

设$(X,\mathscr{F})$是经典拓扑空间,A是X上的F集,若$\forall\alpha\in[0,1]$,$A_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\{x\mid A(x)>\alpha\}\in\mathscr{F}$,则称$A$为$(X,\mathscr{F})$上的下半连续函数,以$\omega(\mathscr{F})$记$(X,\mathscr{F})$上的全体下半连续函数之集,则由

$$(A\cap B)_{\underset{\cdot}{\alpha}}=A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\cap B_{\underset{\cdot}{\alpha}}\text{及}(\bigcup_{t\in T}A_t)_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\bigcup_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\alpha}}$$

易知$\omega(\mathscr{F})$是X上的一个F拓扑,称$(X,\omega(\mathscr{F}))$为由$(X,\mathscr{F})$生成的F拓扑。

定理 1.4.7 上述F拓扑空间$(X,\omega(\mathscr{F}))$是$C_{\mathrm{I}}(C_{\mathrm{II}})$空间当且仅当$(X,\mathscr{F})$是$C_{\mathrm{I}}(C_{\mathrm{II}})$空间。

定义 1.4.8 设X是非空经典集合,D是定向集,则称映射$S:D\to P(X)$为F网,记作$S=\{S(n);n\in D\}$,设$A\in F(X)$,若$\forall n\in D,S(n)\in A$

则称S为A中的F网。设E是定向集,$T:E\to P(X)$是另一F网。

若存在映射$N:E\to D$使得$T=S\cdot N$,且$\forall n\in D$有$m\in E$使当$k\geqslant m$时,$N(k)\geqslant n$,则称T为S的子网。如果定向集D是自

然数集 N,则得到 F 序列 $S:N\to P(X)$

定义 1.4.9　设(X,δ)与(Y,μ)是两 F 拓扑空间,$f:F(X)\to F(Y)$是序同态,$x_\lambda\in P(X)$。

(a) f 叫作在 F 点 x_λ 处连续,如果 $\forall B\subset\eta(f(x_\lambda))$,$f^{-1}(B)\in\eta(x_\lambda)$

(b) f 叫作连续的,如果 $\forall B\in\mu$,$f^{-1}(B)\in\delta$.

定理:1.4.8　设(X,δ)与(Y,μ)是两 F 拓扑空间,$f:F(X)\to F(Y)$是序同态,则以下各条件彼此等价.

$a)$:f 连续

$b)$:$\forall B\in\mu,f^{1}(B)\in\delta$

$c)$:μ 有基 β,$\forall B\in\beta,f^{-1}(B)\in\delta$

$d)$:μ 有子基 γ,$\forall B\in\gamma,f^{\ \ 1}(B)\in\delta$

$e)$:$\forall B\in\mu^c,f^{-1}(B)\in\delta^c$

$f)$:$\forall A\in F(X),f(A^-)\subset(f(A))^-$

$g)$:$\forall B\in F(Y),(f^{-1}(B))\ \subset f^{-1}(B\ \ )$

$k)$:$\forall B\in F(Y),f^{-1}(B^o)\subset(f^{\ \ 1}(B))$

定义 1.4.10　设(X,δ)是 F 拓扑空间,$A,B\in F(X)$,如果 $A^-\cap B=A\cap B^-=\varnothing$,则称 F 集 A 与 B 是隔离的。

定义 1.4.11　设(X,δ)是 F 拓扑空间,$C\in F(X)$,若不存在非空的隔离集 A,B,使 $C=A\cup B$,则称 C 为连通集。当 X 为连通集时,(X,δ)称为连通空间。

定理 1.4.9　设(X,δ)是 F 拓扑空间,则下列条件彼此等价:

(1)(X,δ)不是连通空间

(2)存在非空闭集 A,B,使 $A\cup B=X,A\cap B=\varnothing$

(3)存在非空开集 A,B,使 $A\cup B=X,A\cap B=\varnothing$

定义 1.4.12 设(X,δ)是 F 拓扑空间,$S=\{S(n),n\in D\}$,$x_\lambda\in P(X)$

(1)如果$\forall A\in\eta(x_\lambda)$,$S$ 最终不在A 中,即存在 $n_0\in D$,当 $n\geqslant n_0$ 时,$S(n)\notin A$,则称 x_λ 为S 的极限点,或 S 收敛于x_λ,记作 $S\to x_\lambda$. S 的全体极限点之并记作 $limS$.

(2)如果$\forall A\in\eta(x_\lambda)$,$S$ 经常不在A 中,即$\forall n_0\in D$,有 $n\geqslant n_0$ 使 $S(n)\notin A$,则称 x_λ 为S 的聚点,或 S 聚于x_λ,记作 $S\infty x_\lambda$,S 的全体聚点记作 adS.

定义 1.4.13 设(X,δ)是 F 拓扑空间,$S=\{S(n),n\in D\}$是(X,δ)中的 F 网,$\forall n\in D$,以 $V(S(n))$记 F 点$S(n)$的高度,则得一网

$V(S)=\{V(S(n)),n\in D\}$

称 $V(S)$为 S 的数值网。如果数值网 $V(S)$收敛于实数 α,则称 F 网S 为α—网。

定义 1.4.14 设(X,δ)是 F 拓扑空间,$A\in F(X)$,如果 A 中的α—网在 A 中有一高度等于α 的聚点($\alpha\in(0,1]$),则称 A 为良紧集。当 X 为良紧集时,称(X,δ)为良紧空间。

定理 1.4.10 设(X,δ)是 F 拓扑空间,A 是(X,δ)中的良紧集,则

(1)A 对应的隶属函数在X 中某点处取得最大值。

(2)B 是闭集,$A\cap B$ 是(X,δ)中的良紧集。

注:本节详细内容参见文献[13]有关章节。

第二章 实模糊数

数学的发展离不开数,模糊数学的发展和完善自然也离不开模糊数的研究。模糊数是模糊数量的一种表现形式,人们对事物进行观察、预测、判别、聚类、推理和决策的过程中,经常同模糊数量打交道,因此,模糊数在实际中有着广泛的应用。然而,模糊数的概念产生时间却相当短,最早可追溯 1972 年文献[60],1975 年,*A. Kaufmann* 给出了实模糊数的一般概念,1976 年日本几位学者相继开始了模糊数的系统研究。近年来,我国科技工作者在此方面也作出许多工作,而且发展了模糊数的范围,并在模糊数的应用方面作了许多有益工作。本章就实模糊数的概念、模糊数的运算、模糊数的性质、模糊数的度量、模糊数的极限等作一概括介绍,最后给出模糊数的几个应用实例。

§2.1 模糊数的概念

2.1.1 模糊集的扩张原理

(一)普通集合的扩张原理

定义 2.1.1 设 X,Y 为两普通集合,$f:X\to Y,x\to f(x)$,

f 可以诱导出一个 $P(X)$ 到 $P(Y)$ 的映射及一个从 $P(Y)$ 到 $P(X)$ 的映射:

$$f: P(X) \to P(Y),$$

$$A \to f(A) = \{y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$$

$$f^{-1}: P(Y) \to P(X),$$

$$B \to f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

称 $f(A)$是 A 的象,$f^{-1}(B)$是 B 的逆象,其映射称为普通集的扩张原理。

普通集合的扩张原理有下列简单性质:

定理 2.1.1 (1)$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

(2)$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

(3)$f(\bigcup_{t \in T} A_t) = \bigcup_{t \in T} f(A_t)$

(4)$f(\bigcap_{t \in T} A_t) \subset \bigcap_{t \in T} f(A_t)$,特别地,当 f 是单射时等号成立.

(5)$f^{-1}(\bigcup_{t \in T} B_t) = \bigcup_{t \in T} f^{-1}(B_t)$

(6)$f^{-1}(\bigcap_{t \in T} B_t) = \bigcap_{t \in T} f^{-1}(B_t)$

(7)$f(A)(y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x)$

(8)$f^{-1}(B)(x) = B(f(x))$

证明:(1)(2)显然

(3)$\forall y \in f(\bigcup_{t \in T} A_t)$,$\exists x \in \bigcup_{t \in T} A_t$,使得 $f(x) = y$,

从而$\exists t_0 \in T, x \in A_{t_0}$,使 $f(x) = y$,于是 $y \in f(A_{t_0})$,故 $y \in \bigcup_{t \in T} f(A_t)$.

反之,$\forall y \in \bigcup_{t \in T} f(A_t)$,$\exists t_0 \in T$,使 $y \in f(A_{t_0})$

于是,$\exists x \in A_{t_0} \subset \bigcup_{t \in T} A_t$,使 $f(x) = y$,从而 $y \in f(\bigcup_{t \in T} A_t)$.

(4)$\forall y \in f(\bigcap_{t \in T} A_t)$,$\exists x \in \bigcap_{t \in T} A_t \subset A_t (t \in T)$,使 $f(x) = y$,

于是 $y\in f(A_t)\quad(t\in T)$,

从而 $y\in\bigcap_{t\in T}f(A_t)$

(5) $\forall x\in f^{-1}(\bigcup_{t\in T}B_t)\Rightarrow f(x)\in\bigcup_{t\in T}B_t$,于是

$\exists t_0\in T, f(x)\in B_{t_0}$,即 $x\in f^{-1}(B_{t_0})\subset\bigcup_{t\in T}f^{-1}(B_t)$

反之,$\forall x\in\bigcup_{t\in T}f^{-1}(B_t)$,$\exists t_0\in T$,使 $x\in f^{-1}(B_{t_0})$,即

$f(x)\in B_{t_0}\subset\bigcup_{t\in T}B_t$,于是,$x\in f^{-1}(\bigcup_{t\in T}B_t)$.

(6) $\forall x\in f^{-1}(\bigcap_{t\in T}B_t)\Rightarrow f(x)\in\bigcap_{t\in T}B_t\subset B_t\quad(t\in T)$,于是

$x\in f^{-1}(B_t)\quad(t\in T)\Rightarrow x\in\bigcap_{t\in T}f^{-1}(B_t)$,

反之,$\forall x\in\bigcap_{t\in T}f^{-1}(B_t)$,$t\in T$,$x\in f^{-1}(B_t)$,

即 $f(x)\in B_t$,于是 $f(x)\in\bigcap_{t\in T}B_t$,从而 $x\in f^{-1}(\bigcap_{t\in T}B_t)$

(7) $f(A)(y)=1\Leftrightarrow y\in f(A)\Leftrightarrow\exists x\in A, f(x)=y\Leftrightarrow$

$\bigvee_{f(x)=y}A(x)=1$

(8) $f^{-1}(B)(x)=1\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x)\in B\Leftrightarrow B(f(x))=1$

证毕

(二)模糊集的扩张原理

定义 2.1.2(模糊集合的扩张原理)设 $f:X\rightarrow Y, x\rightarrow f(x)$,

f 可以诱导出一个从 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 的映射及一个从 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 的映射:

$f:F(X)\rightarrow F(Y)$,

$\widetilde{A}\rightarrow f(\widetilde{A})$,

$f^{-1}:F(Y)\rightarrow F(X)$,

$$\widetilde{B}\to f^{-1}(\widetilde{B}).$$

其中 $f(\widetilde{A}),f^{-1}(\widetilde{B})$的隶属函数分别定义为:

$$f(\widetilde{A})(y)=\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)$$

$$f^{-1}(\widetilde{B})(x)=\widetilde{B}(f(x))$$

称 $f(\widetilde{A})$为 $\widetilde{A}$ 的像,称 $f^{-1}(\widetilde{B})$为 $\widetilde{B}$ 的逆像.

定理 2.1.2 设 $f:X\to Y,x\to f(x)$

(1)如果 $\widetilde{A}\in F(X)$,则 $f(\widetilde{A})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda)$,且

(a) $f(\widetilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset f(A_\lambda)\subset f(\widetilde{A})_\lambda,\lambda\in[0,1]$;

(b) $f(\widetilde{A})_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}f(A_\alpha)$;

(c) $f(\widetilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}f(A_\alpha)$;

(d) $f(\widetilde{A})_\lambda=f(A_\lambda)$的充分必要条件是

$$\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)=\max_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)$$

(2)如果 $\widetilde{B}\in F(Y)$,则

$$f^{-1}(\widetilde{B})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda),\text{且}$$

(e) $f^{-1}(\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset f^{-1}(B_\lambda)\subset f^{-1}(\widetilde{B})_\lambda,\lambda\in[0,1]$;

(f) $f^{-1}(\widetilde{B})_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}f^{-1}(B_\alpha)=f^{-1}(B_\lambda)$

(g) $f^{-1}(\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}f^{-1}(B_\alpha)$

证明:(1) $\forall y\in Y$,则由定理 2.1.1(7),

$$(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda))(y)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge f(A_\lambda))(y)$$

$$=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(\bigvee_{f(x)=y}A_\lambda(x)))$$

$$=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\bigvee_{f(x)=y}(\lambda\wedge A_\lambda(x)))$$

$$=\bigvee_{f(x)=y}(\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda(x)))$$

$$=\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)=f(\widetilde{A})(y).$$

所以，$f(\widetilde{A})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda)$

由定理2.1.1(1)及截集和强截集的性质易知$(a)(b)(c)$成立.

(d).如果$\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)=\max_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)$，则$\exists x_0\in X,f(x_0)=y$有

$\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)=\widetilde{A}(x_0)$， 于是

$$f(\widetilde{A})_\lambda=\{y\mid f(\widetilde{A})(y)\geqslant\lambda\}=\{y\mid\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda\}$$

$$=\{y\mid\exists x_0\in X,f(x_0)=y,\widetilde{A}(x_0)\geqslant\lambda\}$$

$$=\{y\mid\exists x_0\in A_\lambda,f(x_0)=y\}$$

$$=f(A_\lambda)$$

反之，$\forall\ y\in f(\widetilde{A})_\lambda$，有 $\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)=f(\widetilde{A})(y)\geqslant\lambda$

于是，由$f(\widetilde{A})_\lambda=f(A_\lambda)$知，$y\in f(A_\lambda)$

即 $\exists x_0\in A_\lambda,f(x_0)=y$，从而

$$\widetilde{A}(x_0)\geqslant\lambda$$

故 $\bigvee\limits_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)=\max\limits_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)$

(2). 由于 $\forall x\in X$

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda)\Big)(y)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge f^{-1}(B_\lambda)(x))$$
$$=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge B_\lambda(f(x)))$$
$$=\widetilde{B}(f(x))=f^{-1}(\widetilde{B})(x),$$

所以 $f^{-1}(\widetilde{B})=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda)$.

由定理 2.1.1(2)及截集、强截集的有关性质知

$$f^{-1}(\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset f^{-1}(B_\lambda)\subset f^{-1}(\widetilde{B})_\lambda;$$

$$f^{-1}(\widetilde{B})_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}f^{-1}(B_\alpha);$$

$$f^{-1}(\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}f^{-1}(B_\alpha)$$

下证 $f^{-1}(\widetilde{B})_\lambda=f^{-1}(B_\lambda)$

事实上,由定理 2.1.1、定理 2.1.2 易知

$$f^{-1}(\widetilde{B})_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}f^{-1}(B_\alpha)=f^{-1}\Big(\bigcap_{\alpha<\lambda}B_\alpha\Big)=f^{-1}(B_\lambda)$$

证毕.

类似地,我们有

定理 2.1.3 设 $f:X\to Y,x\to f(x)$

(1)如果 $\widetilde{A}\in F(X)$,则 $f(\widetilde{A})=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}})$,

且

$$(a)\ f(\widetilde{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}})\subset f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}})\subset f(\widetilde{A})_\lambda$$

$$(b)\ f(\widetilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}f(A_{\underset{\cdot}{\alpha}})=f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}})$$

$$(c)\ f(\tilde{A})_{\lambda}=\bigcap_{\alpha<\lambda}f(A_{\underset{\cdot}{\alpha}});$$

(2)如果 $\tilde{B}\in F(Y)$,则

$$f^{-1}(\tilde{B})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}})$$

且

$$(d)\ f^{-1}(\tilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset f^{-1}(B_{\lambda})\subset f^{-1}(\tilde{B})_{\lambda};$$

$$(e)\ f^{-1}(\tilde{B})_{\lambda}=\bigcap_{\alpha<\lambda}f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\alpha}});$$

$$(f)\ f^{-1}(\tilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\alpha}})=f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}})$$

证明:只要证明

$$f(\tilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}})$$

$$f^{-1}(\tilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}})$$

事实上,由定理 2.1.1、定理 2.1.2 知

$$f(\tilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}f(A_{\underset{\cdot}{\alpha}})=f(\bigcup_{\alpha>\lambda}A_{\underset{\cdot}{\alpha}})=f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}});$$

$$f^{-1}(B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\alpha}})=f^{-1}(\bigcup_{\alpha>\lambda}B_{\underset{\cdot}{\alpha}})=f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}}).$$

证毕.

进一步地,我们还有

定理 2.1.4　设 $f:X\rightarrow Y,x\rightarrow f(x)$,

(1)如果 $\tilde{A}\in F(X)$,且存在 $\{H_{\tilde{A}}\}\in K(X)$,使得

$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset H_{\tilde{A}}(\lambda)\subset A_{\lambda}\quad(\lambda\in[0,1])$,则

$$f(\tilde{A})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(H_{\tilde{A}}(\lambda))$$

(其中　$K(X)$表示[0,1]上的集合套全体.)

且

(a) $f(\widetilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset f(H_{\widetilde{A}}(\lambda)) \subset f(\widetilde{A})_{\lambda}$;

(b) $f(\widetilde{A})_{\lambda} = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} f(H_{\widetilde{A}}(\alpha))$;

(c) $f(\widetilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup\limits_{\alpha>\lambda} f(H_{\widetilde{A}}(\alpha))$;

(2)如果 $\widetilde{B} \in F(Y)$,且存在 $\{H_{\widetilde{B}}\} \in K(Y)$使得

$B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset H_{\widetilde{B}}(\lambda) \subset B_{\lambda} \quad (\lambda \in [0,1])$,则

$$f^{-1}(\widetilde{B}) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f^{-1}(H_{\widetilde{B}}(\lambda)),$$

且

(d) $f^{-1}(\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset f^{-1}(H_{\widetilde{B}}(\lambda)) \subset f^{-1}(\widetilde{B})_{\lambda}$;

(e) $f^{-1}(\widetilde{B})_{\lambda} = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} f^{-1}(H_{\widetilde{B}}(\alpha))$;

(f) $f^{-1}(\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup\limits_{\alpha>\lambda} f^{-1}(H_{\widetilde{B}}(\alpha))$.

定理 2.1.5 设 $f: X \to Y$, f 和 f^{-1}有性质:

(1)如果 $\widetilde{A} \in F(X)$,则 $f^{-1}(f(\widetilde{A})) \supset \widetilde{A}$,

特别地,当 f 是单射时,$f^{-1}(f(\widetilde{A})) = \widetilde{A}$

(2).如果 $\widetilde{B} \in F(Y)$,则 $f(f^{-1}(\widetilde{B})) \subset \widetilde{B}$,

特别地,当 f 是满射时,$f(f^{-1}(\widetilde{B})) = \widetilde{B}$

证明:(1)由于对 $\forall x \in X$,

$$f^{-1}(f(\widetilde{A}))(x) = f(\widetilde{A})(f(x))$$

$$= \bigvee_{f(x') = f(x)} \widetilde{A}(x')$$

$$=\begin{cases}\geqslant \tilde{A}(x) & \text{当 } f \text{ 不是单射;}\\ =\tilde{A}(x) & \text{当 } f \text{ 是单射}\end{cases}$$

从而 $f^{-1}(f(\tilde{A}))=\begin{cases}\supset \tilde{A} & \text{当 } f \text{ 不是单射}\\ =\tilde{A} & \text{当 } f \text{ 是单射}\end{cases}$

(2). 由于对 $\forall y\in Y$

$$f(f^{-1}(\tilde{B}))(y)=\bigvee_{f(x)=y} f^{-1}(\tilde{B})(x)$$

$$=\bigvee_{f(x)=y}\tilde{B}(f(x))$$

$$=\begin{cases}\tilde{B}(y) & \text{当 } f \text{ 是满射}\\ \leqslant \tilde{B}(y) & \text{当 } f \text{ 不是满射}\end{cases}$$

于是 $f(f^{-1}(\tilde{B}))=\begin{cases}\tilde{B} & \text{当 } f \text{ 是满射}\\ \subset \tilde{B} & \text{当 } f \text{ 不是满射}\end{cases}$ 证毕.

定理 2.1.6 设 $f:X\to Y, g:Y\to Z, g\circ f:X\to Z$, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$，则有

(1) 如果 $\tilde{A}\in F(X)$，则

$$g(f(\tilde{A}))=(g\circ f)(\tilde{A})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda g(f(A_\lambda))$$

(2). 如果 $\tilde{C}\in F(Z)$，则

$$f^{-1}(g^{-1}(\tilde{C}))=(g\circ f)^{-1}(\tilde{C})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(g^{-1}(C_\lambda))$$

证明: (1) 因为，$g(f(A_\lambda))=\{z\mid \exists y\in f(A_\lambda), g(y)=z\}$

$$=\{z\mid \exists x\in A_\lambda, f(x)=y, g(y)=z\}$$

$$=\{z\mid \exists x\in A_\lambda, (g\circ f)(x)=z\}$$

$$=(g\circ f)(A_\lambda)$$

于是 $(g\circ f)(\tilde{A})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(g\circ f)(A_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda g(f(A_\lambda))$

又由于 $f(\tilde{A})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda)$，且 $f(\tilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset f(A_\lambda)\subset f(\tilde{A})_\lambda$

由定理 2.1.4 知

$g(f(\tilde{A}))=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda g(f(A_\lambda))=(g\circ f)(\tilde{A})$

(2)类似于(1)可得证。

证毕.

定义 2.1.3 设 $\tilde{A}\in F(X),\tilde{B}\in F(Y)$，

记 $\tilde{A}\times\tilde{B}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda\times B_\lambda)$

称为 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 的卡氏积。

定理 2.1.7 $(\tilde{A}\times\tilde{B})(x,y)=\tilde{A}(x)\wedge\tilde{B}(y)$

证明:因为

$$
\begin{aligned}
(\tilde{A}\times\tilde{B})(x,y)&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(A_\lambda\times B_\lambda)(x,y))\\
&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(A_\lambda(x)\wedge B_\lambda(y)))\\
&\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\wedge A_\lambda(x)=\tilde{A}(x)
\end{aligned}
$$

同理，$(\tilde{A}\times\tilde{B})(x,y)\leqslant\tilde{B}(y)$

于是，$(\tilde{A}\times\tilde{B})(x,y)\leqslant\tilde{A}(x)\wedge\tilde{B}(y)$

假设“$<$”号成立，则 $\exists\,\alpha$

使 $(\tilde{A}\times\tilde{B})(x,y)<\alpha<\tilde{A}(x)\wedge\tilde{B}(y)$

因此，对 $\forall\,\lambda\in[0,1]$ 有 $\lambda\wedge A_\lambda(x)\wedge B_\lambda(y)<\alpha$

从而，当 $\lambda\geqslant\alpha$ 时，$A_\lambda(x)=0$ 或 $B_\lambda(y)=0$

我们不妨设 $A_\alpha(x)=0$,则 $A_\lambda(x)=0(\lambda\geqslant\alpha)$,于是

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(x)&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\wedge A_\lambda(x)\\&=\bigvee_{\lambda\in[0,\alpha)}\lambda\wedge A_\lambda(x)\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,\alpha)}\lambda=\alpha\end{aligned}$$

故 $\widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(y)\leqslant\widetilde{A}(x)\leqslant\alpha$,得出矛盾

故结论成立。 证毕.

定理 2.1.8 设 $f:X\times Y\to Z,(x,y)\to f(x,y)$

(1)如果 $\widetilde{A}\in F(X),\widetilde{B}\in F(Y)$,则

$f(\widetilde{A}\times\widetilde{B})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda\times B_\lambda)$且

$(a)f(\widetilde{A}\times\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset f(A_\lambda\times B_\lambda)\subset f(\widetilde{A}\times\widetilde{B})_\lambda$;

$(b)f(\widetilde{A}\times\widetilde{B})_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}f(A_\alpha\times B_\alpha)$;

特别地,$f(\widetilde{A}\times\widetilde{B})_\lambda=f(A_\lambda\times B_\lambda)$的充分必要条件是

$\bigvee_{f(x,y)=z}(\widetilde{A}\times\widetilde{B})(x,y)=\max_{f(x,y)=z}(\widetilde{A}\times\widetilde{B})(x,y)$,

$(c)f(\widetilde{A}\times\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}f(A_\alpha\times B_\alpha)$;

其中 $f(A_\lambda\times B_\lambda)=\{z\mid\exists x\in A_\lambda,y\in B_\lambda,z=f(x,y)\}$.

证明方法:由定理 2.1.7,类似定理 2.1.2 可得证。

2.1.2 模糊集合表示的模糊数

下面我们讨论实数域 R 上的一种特殊的模糊集,称之为模糊数,它是一种很有用的表示模糊数据的方法。

定义 2.1.4 若实数域 R 上的模糊集 $\widetilde{A}\in F(R)$的隶属函数 $\widetilde{A}(x)$在 R 上连续且具有下列性质:

(1)$\widetilde{A}$ 是凸模糊集,即对 $\forall\lambda\in[0,1]$,A_λ 是闭区间,记为$[A_\lambda\ ,A_\lambda^+]$

(2)$\widetilde{A}$ 是正规的,即 $\exists x_0\in R$,使 $\widetilde{A}(x_0)=1$

则称 $\widetilde{A}$ 是一个实模糊数,下面简称之为模糊数。

从直观上来看,模糊数的隶属函数的图形是单峰的且峰顶使隶属度达到 1,如图 2-1 所示。

这种模糊数用来表示隶属函数达到峰值 1 的 x_0 左右的数。模糊数的模糊程度可由其隶属函数图形的平坦或陡峭程度来表示。特别,模糊数也允许隶属度达到峰值的点是一个区间。如图 2-2,图 2-3 所示。

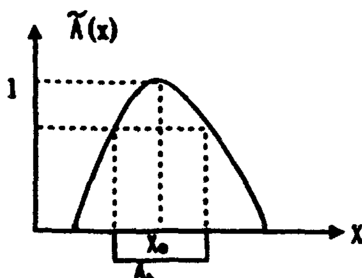


图2-1模糊数

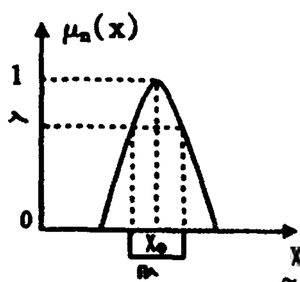


图2-2陡峭的模糊数 $\tilde{n}$

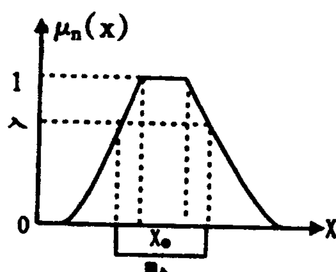


图2-3平坦的模糊数

R 上的模糊数全体记为 $F^*(R)$，即 $F^*(R)=\{\widetilde{A}\mid \widetilde{A}$ 是模糊数$\}$.

由模糊集的分解定理，对于任何 $\widetilde{a}\in F^*(R)$，有

$$\widetilde{a}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\alpha_\lambda^-,\alpha_\lambda^+]$$

例 2.1.1　设 $a\in R$，我们定义

$$a(x)=\begin{cases}1, x=a\\0, x\neq a\end{cases}$$

则　$a\in F^*(R)$，且 $a=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a,a]$

例 2.1.2　设 $a,b\in R$，我们定义

$$[a,b](x)=\begin{cases}1, x\in[a,b]\\0, x\notin[a,b]\end{cases}$$

则　$[a,b]\in F^*(R)$，且

$$[a,b]=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a,b]$$

定义 2.1.5　设 $\widetilde{a}\in F(R)$，称 $\widetilde{a}$ 为模糊凸的.

如果对于任何 $x,y\in R$，有

$\tilde{a}(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\tilde{a}(x)\wedge\tilde{a}(y),\lambda\in[0,1]$

定理 2.1.9　设 $\tilde{a}\in F(R)$，$\tilde{a}$ 是模糊凸的充分必要条件是对于任意 $\lambda\in[0,1]$，a_λ 是凸集。

证明：设 $\tilde{a}$ 是模糊凸的。

由于 $a_\lambda=\{x|\tilde{a}(x)\geqslant\lambda\}$

故，当 $x,y\in a_\lambda$ 时，$\tilde{a}(\alpha x+(1-\alpha)y)\geqslant\tilde{a}(x)\wedge\tilde{a}(y)\geqslant\lambda$

故，$\alpha x+(1-\alpha)y\in a_\lambda$，即 a_λ 是凸集。

反过来，如果对于任何 $\lambda\in[0,1]$，a_λ 是凸集，则对于任何 x，$y\in R$

令 $\alpha=\tilde{a}(x)\wedge\tilde{a}(y)$，有

$x\in a_\alpha$ 和 $y\in a_\alpha$

由于 a_α 是凸集，则对于任何 $\lambda\in[0,1]$有

$\lambda x+(1-\lambda)y\in a_\alpha$

于是　$\tilde{a}(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\alpha=\tilde{a}(x)\wedge\tilde{a}(y)$

即　$\tilde{a}$ 是模糊凸的.　　　　证毕.

定理 2.1.10　设 $\tilde{a}\in F^*(R)$，则 $\tilde{a}$ 是模糊凸的。

证明：由定理 2.1.9 即证。

定理 2.1.11　设 $\tilde{a}\in F(R)$，则 $\tilde{a}$ 是模糊数的充分必要条件是

$$\tilde{a}(x)=\begin{cases}1,x\in[m,n]\neq\varnothing\\L(x),x<m\\R(x),x>n\end{cases}$$

其中 $L(x)$是右连续的单调不减函数,$0\leqslant L(x)<1$,且 $\lim_{x\to-\infty} L(x)=0$

$R(x)$是左连续的单调不增函数,$0\leqslant R(x)<1$,且 $\lim_{x\to+\infty} R(x)=0$

证明:必要性,设 $\tilde{a}\in F^*(R)$

①由于 $\tilde{a}$ 是正规的,所以,$a_1=[a_1^-,a_1^+]=[m,n]\neq\varnothing$

②当 $x<m$ 时,令 $L(x)=\tilde{a}(x)$,则 $0\leqslant L(x)<1$,

设 $x_1<x_2\leqslant m$

令 $\alpha=\tilde{a}(x_1)$,由于 $\tilde{a}(m)=1$,则$[x_1,m]\subset a_\alpha$

于是 $x_2\in a_\alpha$,从而 $L(x_2)\geqslant\alpha-L(x_1)$,

所以 $L(x)(x<m)$是单调不减的。下证 $L(x)$是右连接的。

假设不然,存在 $x_0<m$,使得 $\lim_{x\to a_0} L(x)=\alpha>L(x_0)$,

于是对于任何 $x\in(x_0,m)$,有 $L(x)\geqslant\alpha$,而 $L(x_0)<\alpha$,由实数的稠密性,存在 λ 使得$L(x_0)<\lambda<\alpha$,因此,对任何 $x\in(x_0,m)$有 $x\in a_\lambda$,而 $x_0\notin a_\lambda$,取 $x'_n=x_0+\dfrac{m-x_0}{n+1}$,则 $x_0<x'_n<m$。

所以,由 a_λ 的闭凸性知,$x'_n\in a_\lambda$,$n=1,2,\cdots$。

从而 $\lim_{n\to\infty}x'_n\in a_\lambda$,得 $\lim_{n\to\infty}x'_n=x_0$,矛盾

往证 $\lim_{x\to-\infty} L(x)=0$.假若不然,由于 $L(x)$是单调有界函数,于是

$\lim_{x\to-\infty} L(x)=\alpha>0$,对于任何 $x<m$,由于 $L(x)$是单调不减的,所以,

$\tilde{a}(x)=L(x)\geqslant\alpha$

于是 a_α 是无界集，矛盾！

③同理可证，当 $x>n$ 时，令 $R(x)=\tilde{a}(x)$，则 $0\leqslant R(x)<1$

$R(x)$是单调不增左连续函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=0$

充分性：

(1)由于 $a_1=[m,n]\neq\varnothing$，所以 $\tilde{a}$ 是正规的。

(2)对于任何 $\lambda\in[0,1]$，令

$a_\lambda = \wedge\{x\mid L(x)\geqslant\lambda\}, a_\lambda^+ = \vee\{x\mid R(x)\geqslant\lambda\}$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}L(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=0$，所以$[a_\lambda^-, a_\lambda^+]$是有限闭区间，且 $a_1\subset[a_\lambda, a_\lambda^+]$，经证 $a_\lambda=[a_\lambda, a_\lambda^+]$，事实上，

对于任何 $x\in[a_\lambda, a_\lambda^+]$，如果 $x\in[m,n]$，则 $\tilde{a}(x)=1\geqslant\lambda$

如果 $x\in(a_\lambda^-, m)$，则一定存在 $a_\lambda^-<x_1<x$ 使得$L(x_1)\geqslant\lambda$

否则$\wedge\{x\mid L(x)\geqslant\lambda\}\geqslant x_1>a_\lambda$ 矛盾，

因而根据 $L(x)$的单调不减性有：

$\tilde{a}(x)=L(x)\geqslant L(x_1)\geqslant\lambda$

故 $x\in a_\lambda$，于是$(a_\lambda, m)\subset a_\lambda$，如果 $x=a_\lambda^-$，

根据 $L(x)$的右连续性有

$\tilde{a}(a_\lambda^-)=\lim\limits_{x\to a_\lambda^{-+}}L(x)\geqslant\lambda$

故$[a_\lambda^-, m]\subset a_\lambda$；

同样可证明$(n, a_\lambda^+)\subset a_\lambda$，于是

$[a_\lambda, a_\lambda^+]\subset a_\lambda$

另一方面，如果 $x\notin[a_\lambda^-, a_\lambda^+]$，则 $x<a_\lambda^-$ 或$x>a_\lambda^-$。

如果 $x < a_\lambda^-$，则 $\quad x < \wedge\{x \mid L(x) \geqslant \lambda\}$

于是 $\tilde{a}(x) = L(x) < \lambda$

如果 $x > a_\lambda^+$，则 $\quad x > \vee\{x \mid R(x) \geqslant \lambda\}$

于是 $\tilde{a}(x) = R(x) < \lambda$

从而，都有 $x \notin a_\lambda$，这样，我们就证明了对于任何 $\lambda \in (0,1)$。

$a_\lambda = [a_\lambda^-, a_\lambda^+]$

由定义 2.1.4 知 $\tilde{a}$ 是一个模糊数。　　　　证毕.

由上述定理可知，一个模糊数 $\tilde{a}$ 可以由 $[m_{\tilde{a}}, n_{\tilde{a}}] = a_1$ 及 $L_{\tilde{a}}(x)$，$R_{\tilde{a}}(x)$ 惟一确定，记 $\tilde{a} = ([m_{\tilde{a}}, n_{\tilde{a}}], L_{\tilde{a}}, R_{\tilde{a}})$

定理 2.1.12（模糊数的表现定理）　设

$$H:(0,1] \to K^*(R) = \{[a,b]; a \leqslant b, a, b \in R\},$$

$$\lambda \to H(\lambda) = [m_\lambda, n_\lambda]$$

则 (1) $\tilde{a} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda) \in F^*(R)$

(2) $a_\lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(\lambda_n)$，$(\lambda \in (0,1])$.（$\lambda_n = (1 - \frac{1}{n+1})\lambda$）；

(3) $\tilde{a} = ([m_{\tilde{a}}, n_{\tilde{a}}], L_{\tilde{a}}, R_{\tilde{a}})$，其中

$$m_{\tilde{a}} = \lim_{n\to\infty} m_{\lambda'_n} \qquad n_{\tilde{a}} = \lim_{n\to\infty} n_{\lambda'_n} \qquad \lambda'_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$L_{\tilde{a}}(x) = \bigvee_{\lambda \in (0,1)} \{\lambda \mid m_\lambda \leqslant x\}$$

$$R_{\tilde{a}}(x) = \bigvee_{\lambda \in (0,1)} \{\lambda \mid n_\lambda \geqslant x\}$$

证明：令 $H(0) = R$，则 $\{H\} \in K(R)$，由模糊集合的表现定理知 $\{H\}$ 惟一确定模糊集

$$\tilde{a} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda) \in F(R)$$

且 $a_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) = \bigcap_{0<\alpha<\lambda} H(\alpha) = \bigcap_{0<\alpha<\lambda} [m_\alpha, n_\alpha], \lambda \in (0,1]$

(1)由于闭区间的任意交集仍是闭区间,所以 a_λ 仍为闭区间 $(\lambda \in (0,1])$,且 $a_1 \supset H(1) = [m_1, n_1] \neq \varnothing$,于是 $\tilde{a} \in F^*(R)$

(2)由于 $0 < \lambda_n = (1 - \frac{1}{n+1})\lambda < \lambda$,所以

$a_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} H(\lambda_n)$

另一方面,又由于 $H(\lambda_n) \subset a_{\lambda_n}$,所以

$\bigcap_{n=1}^{\infty} H(\lambda_n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n} = a_{(\bigvee_{n=1}^{\infty} \lambda_n)} = a_\lambda$

故有 $a_\lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(\lambda_n)$

(3).由(2)知,$a_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(\lambda'_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [m_{\lambda'_n}, n_{\lambda'_n}]$

由于 $\{H\} \in K(R)$,所以 $m_{\lambda'_n}$ 是单调不减的,且 $m_{\lambda'_n} \leqslant m_1$。

$n_{\lambda'_n}$ 是单调不增的,且 $n_{\lambda'_n} \geqslant n_1$,于是有

$m_{\tilde{a}} = \lim_{n\to\infty} m_{\lambda'_n}, n_{\tilde{a}} = \lim_{n\to\infty} n_{\lambda'_n}$

且对于任何 $n \geqslant 1, m_{\lambda'_n} \leqslant m_{\tilde{a}} \leqslant n_{\tilde{a}} \leqslant n_{\lambda'_n}$

因此,我们可以证明 $a_1 = [m_{\tilde{a}}, n_{\tilde{a}}]$

当 $x < m_{\tilde{a}}$ 时,由定理 2.1.11

$$
\begin{aligned}
L_{\tilde{a}}(x) = \tilde{a}(x) &= \bigvee_{\lambda \in (0,1]} (\lambda \wedge H(\lambda)(x)) \\
&= \bigvee_{0<\lambda<1} \{\lambda \mid x \in H(\lambda)\} \\
&= \bigvee_{0<\lambda<1} \{\lambda \mid x \in [m_\lambda, n_\lambda]\} \\
&= \bigvee_{0<\lambda<1} \{\lambda \mid x \geqslant m_\lambda\}
\end{aligned}
$$

同理可证,当 $x > n_{\tilde{a}}$ 时,$R_{\tilde{a}}(x) = \bigvee_{0<\lambda<1} \{\lambda \mid x \leqslant n_\lambda\}$

证毕.

§ 2.2 模糊数的运算及性质

(一)模糊数的算术运算

我们采用扩张原理来定义模糊数的各种算术运算和函数等.

设 $\widetilde{A},\widetilde{B}$ 是两个模糊数,其隶属函数分别记为 $\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(y)$.

定义 2.2.1 设 $*$ 是实数域 R 上的一种二元运算,$\widetilde{A},\widetilde{B}$ 为两任意模糊数,则模糊数 $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的运算按下列定义:

$*:R\times R\to R \quad (x,y)\to x*y.$

扩张运算为:$*:F^*(R)\times F^*(R)\to F^*(R)$

$$(\widetilde{A},\widetilde{B})\to\widetilde{A}*\widetilde{B}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda*B_\lambda)$$

其隶属函数为$(\widetilde{A}*\widetilde{B})(z)=\bigvee\limits_{z=x*y}(\widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(y))$

特别,四则运算定义为:

$$(\widetilde{A}+\widetilde{B})(z)=\bigvee_{z=x+y}(\widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(y))$$

$$(\widetilde{A}-\widetilde{B})(z)=\bigvee_{z=x-y}(\widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(y))$$

$$(\widetilde{A}\cdot\widetilde{B})(z)=\bigvee_{z=xy}(\widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(y))$$

$$(\widetilde{A}\div\widetilde{B})(z)=\bigvee_{z=x\div y}(\widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(y)),y\neq 0$$

极小、极大运算定义为:

$$(\widetilde{A}\wedge\widetilde{B})(z)=\bigvee_{z=x\wedge y}(\widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(y))$$

$$(\widetilde{A}\vee\widetilde{B})(z)=\bigvee_{z=x\vee y}(\widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(y))$$

这里要求模糊数的隶属函数连续是合理的，因为在不连续时，对某些运算可能会出现怪现象。例如：

5 左右 = {0/2,0.1/3,0.8/4,1/5,0.8/6,0.1/7,0/8}

2 左右 = {0/0,0.6/1,1/2,0.6/3,0/4}

则(1):5 左右 + 2 左右 = {0/2,0/3,0.1/4,0.6/5,0.6/8,1/7,0.8/8,0.6/9,0.1/10,0/11,0/12}

(2):5 左右 - 2 左右 = {0.8/2,1/3,0.8/4,0.6/5,0.1/6,0/7}

对加减运算而言，似乎还较合理，但对乘法运算：

(3):5 左右×2 左右 = {0/0,0/2,0.1/3,0.6/4,0.6/5,0.6/6,0.1/7,0.8/8,0.1/9,1/10,0.8/12,0.1/14,0.6/15,0/16,0.6/18,0.1/21,0/24,0/28,0/32}

可见结果的隶属函数出现了多次起伏，破坏了模糊数的凸性，故结果不再是模糊数，这显然是不能允许的。

但是，对于连续的模糊数可证明下列结构定理.

定理 2.2.1　设 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 为两个连续的模糊数，$*$ 是连续递增的二元运算.

则 $\widetilde{A} * \widetilde{B}$ 也是连续的模糊数.

由于加法和乘法都是连续递增的二元函数，故模糊数对其上的加法和乘法是封闭的.

对加法和乘法还可以证明下述性质.

定理 2.2.2　设 $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}$ 为任意的三个模糊数，则对加法和乘法而言有：

1. 交换律：$\widetilde{A}+\widetilde{B}=\widetilde{B}+\widetilde{A}$，$\widetilde{A}\times\widetilde{B}=\widetilde{B}\times\widetilde{A}$

2.结合律:$(\widetilde{A}+\widetilde{B})+\widetilde{C}=\widetilde{A}+(\widetilde{B}+\widetilde{C})$

$$(\widetilde{A}\times\widetilde{B})\times\widetilde{C}=\widetilde{A}\times(\widetilde{B}\times\widetilde{C})$$

3.次分配律:$\widetilde{A}\times(\widetilde{B}+\widetilde{C})\subseteq\widetilde{A}\times\widetilde{B}+\widetilde{A}\times\widetilde{C}$

定理 2.2.3　设 $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C},\widetilde{D}$ 为模糊数,若 $\widetilde{A}\subseteq\widetilde{B}$,且 $\widetilde{C}\subseteq\widetilde{D}$.

则　$\widetilde{A}+\widetilde{C}\subseteq\widetilde{B}+\widetilde{D}$

$\widetilde{A}\times\widetilde{C}\subseteq\widetilde{B}\times\widetilde{D}$

即模糊数加法和模糊数乘法对模糊集的包含关系具有单调性。

利用上述运算规律有时可以简化模糊数的运算,所以上述几个定理在实际应用中是很重要的。

定义 2.2.2　设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in F^*(R)$,称 $\widetilde{A}\leqslant\widetilde{B}$,如果对于任意 $\lambda\in(0,1]$

有　$A_\lambda^-\leqslant B_\lambda^-$ 和 $A_\lambda^+\leqslant B_\lambda^+$;

称 $\widetilde{A}<\widetilde{B}$,如果 $\widetilde{A}\leqslant\widetilde{B}$,且存在 $\lambda_0\in(0,1]$使得

$A_{\lambda_0}^-<B_{\lambda_0}^-$或 $A_{\lambda_0}^+<B_{\lambda_0}^+$;

称 $\widetilde{A}=\widetilde{B}$,如果 $\widetilde{A}\leqslant\widetilde{B}$ 且 $\widetilde{B}\leqslant\widetilde{A}$.

显然,下列命题成立.

命题 2.2.1　$(F^*(R),\leqslant)$是一偏序集.

命题 2.2.2　设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in F^*(R)$,$\widetilde{A}=\widetilde{B}$ 的充分必要条件是对任何$\lambda\in(0,1]$

$A_\lambda^-=B_\lambda^-$ 和 $A_\lambda^+=B_\lambda^+$

定义 2.2.3 设 $\widetilde{A}\in F^*(R)$,如果对于任何 $x\in R, x\leqslant 0$,有

$\widetilde{A}(x)=0$

称 $\widetilde{A}$ 为正模糊数;如果对于任何 $x\in R, x\geqslant 0$,有 $\widetilde{A}(x)=0$

称 $\widetilde{A}$ 为负模糊数.

命题 2.2.3 设 $\widetilde{A}\in F^*(R)$,$\widetilde{A}$ 是正模糊数的充要条件是 $\widetilde{A}>0$;$\widetilde{A}$ 是负模糊数的充要条件是 $\widetilde{A}<0$.

证明:由定义 2.2.2 和定义 2.2.3 即可证明,这里从略。

利用扩张原理还可以定义一般的模糊数的函数概念.

定义 2.2.4 设 $f(x)$ 为实数域 R 上的一个实函数,$\widetilde{A}$ 是任意的模糊数,其隶属函数记为 $\widetilde{A}(x)$,则模糊数上的函数 $f(\widetilde{A})$ 由下列隶属函数来确定

$$\mu_{f(\widetilde{A})}(y)=\begin{cases}\bigvee\limits_{y=f(x)}\widetilde{A}(x), & \text{若存在 } x\in R, \text{使 } y=f(x)\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

更一般的 n 元函数可定义为:

定义 2.2.5 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 维欧氏空间 R^n 上的一个实函数,$\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 为任意的模糊数,它们的隶属函数依次记为 $\widetilde{A}_1(x_1),\widetilde{A}_2(x_2),\cdots,\widetilde{A}_n(x_n)$,则模糊数上的 n 元函数 $f(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n)$ 由下列隶属函数来确定:

$\mu_{f(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n)}(y)=$

$$\begin{cases} \bigvee\limits_{y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)} \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i(x_i), \text{当存在 } x_1,x_2,\cdots,x_n \in R \\ \qquad \text{使 } y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ 0 \quad , \quad \text{否则} \end{cases}$$

于是定理 2.2.1 可推广为:

定理 2.2.4 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 R^n 上的连续递增的 n 元实函数,$\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 是 n 个连续的模糊数,则 $f(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n)$也是连续的模糊数.

这个定理保证了模糊数对连续递增函数的封闭性,特别是对加法和乘法运算的封闭性,是十分重要的。

(二)模糊数的关系运算

模糊数作为一种模糊数量的表示,自然要求比较其大小,但是值得指出,模糊集间的包念关系不能作为比较大小的运算。下面介绍几个比较模糊数的大小的运算模式.

1.基于数字特征的关系运算.

我们知道"重心"或"均值"表示了模糊集的中心所在,应用到模糊数上它在某种意义上(或一定程度上)表示了该模糊数的大小.

定义 2.2.6 设 $\widetilde{n}_1,\widetilde{n}_2$ 是 R 上的两个模糊数,其隶属函数分别记为 $\widetilde{n}_1(x),\widetilde{n}_2(x)$,它们的重心为:

$$G(\widetilde{n}_1) = \frac{\int_R \widetilde{n}_1(x)xdx}{\int_R \widetilde{n}_1(x)dx}$$

$$G(\tilde{n}_2)=\frac{\int_R \tilde{n}_2(x)x\,dx}{\int_R \tilde{n}_2(x)\,dx}$$

方差为：$\sigma(\tilde{n}_1)=\sqrt{\dfrac{\int_R \tilde{n}_1(x)\cdot(x-G(\tilde{n}_1))^2dx}{\int_R \tilde{n}_1(x)\,dx}}$

$$\sigma(\tilde{n}_2)=\sqrt{\frac{\int_R \tilde{n}_2(x)(x-G(\tilde{n}_2))^2dx}{\int_R \tilde{n}_2(x)\,dx}}$$

(1)若 $G(\tilde{n}_1)>G(\tilde{n}_2)$，则称 $\tilde{n}_1$ 模糊地大于 $\tilde{n}_2$，可信度为 t，记作

$$\tilde{n}_1 \tilde{>} \tilde{n}_2(t)$$

(2)若 $G(\tilde{n}_1)<G(\tilde{n}_2)$，则称 $\tilde{n}_1$ 模糊地小于 $\tilde{n}_2$，可信度为 t，记作

$$\tilde{n}_1 \tilde{<} \tilde{n}_2(t)$$

(3)若 $G(\tilde{n}_1)=G(\tilde{n}_2)$，则称 $\tilde{n}_1$ 模糊地等于 $\tilde{n}_2$，可信度为 t.

记作 $\tilde{n}_1 \tilde{=} \tilde{n}_2(t)$

其中的可信度 t 按如下计算，令

$$\sigma'(\tilde{n}_1)=\sqrt{\frac{\int_{G(\tilde{n}_1)-M}^{G(\tilde{n}_1)+M} \tilde{n}_1(x)(x-G(\tilde{n}_1))^2dx}{\int_{G(\tilde{n}_1)-M}^{G(\tilde{n}_1)+M} \tilde{n}_1(x)\,dx}}$$

$$\sigma'(\tilde{n}_2) = \sqrt{\frac{\int_{G(\tilde{n}_2)-M}^{G(\tilde{n}_2)+M} \tilde{n}_2(x)(x - G(\tilde{n}_2))^2 dx}{\int_{G(\tilde{n}_2)-M}^{G(\tilde{n}_2)+M} \tilde{n}_2(x) dx}}$$

则 $t = max\left\{\frac{\sigma'(\tilde{n}_1)}{\sigma(\tilde{n}_1)}, \frac{\sigma'(\tilde{n}_2)}{\sigma(\tilde{n}_2)}\right\}$

其中 M 是一个适当选定的常数。

2. 基于集合运算的关系运算

下面介绍一种新的观点来看待模糊数间的比较，把 $\tilde{n}_2 > \tilde{n}_1$ (或 $\tilde{n}_1 < \tilde{n}_2$)也看作一个模糊数

定义 2.2.7 设 $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2$ 为实数域 R 上的两个模糊数.

$\tilde{n}_1 > \tilde{n}_2$ 或 $\tilde{n}_2 < \tilde{n}_1$ 定义为

$\tilde{n}_1 > \tilde{n}_2 = \tilde{n}_1 \wedge (> \tilde{n}_2)$

或 $\tilde{n}_2 < \tilde{n}_1 = \tilde{n}_2 \wedge (< \tilde{n}_1)$

其中 $> \tilde{n}_2$ 和 $< \tilde{n}_1$ 为如下定义的模糊数：

$$> \tilde{n}_2 : \mu_{>\tilde{n}_2}(x) = \begin{cases} 1 - \tilde{n}_2(x), \text{当 } x > n_2 \\ 0, \text{当 } x \leqslant n_2 \end{cases}$$

这里 n_2 是 $\tilde{n}_2$ 的核的中心，故 $\tilde{n}_2(n_2) = 1$

$$< \tilde{n}_1 : \mu_{<\tilde{n}_1}(x) = \begin{cases} 1 - \tilde{n}_1(x), \text{当 } x < n_1 \\ 0 \quad, \text{当 } x \geqslant n_1 \end{cases}$$

这里 n_1 为 $\tilde{n}_1$ 的核的中心，故 $\tilde{n}_1(n_1) = 1$

为了清楚起见,用图来说明。设 $\tilde{n}=\tilde{2}$(即模糊数 2,代表"大约 2","2 左右"等意思),图 2-4 表示 $\tilde{2}$,图 2-5 表示模糊数 $<\tilde{2}$,图 2-6 表示 $>\tilde{2}$,如图:

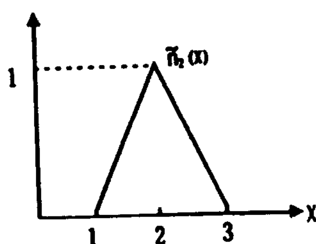


图2-4模糊数$\tilde{2}$

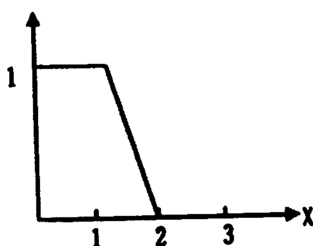


图2-5模糊数$<\tilde{2}$



图2-6模糊数$>\tilde{2}$

定义 2.2.8 模糊数$\geqslant\tilde{n}$与$\leqslant\tilde{n}$定义为:

$\geqslant\tilde{n} = \tilde{n} \vee (>\tilde{n})$

$\leqslant\tilde{n} = \tilde{n} \vee (<\tilde{n})$

按照 *W. Siler* 和 *J. J. Buckley* 的观点[6],当集合运算符($\wedge$或$\vee$)两边的模糊集相容时,采用扎德算子(即 $\wedge = min$, $\vee = max$);当两边的模糊集不相容时,采用卢卡谢维奇算子(即 $P \wedge Q = max\{P+Q-1,0\}$, $P \vee Q = min\{P+Q,1\}$.

在上述关于$\geqslant\tilde{n}$或$\leqslant\tilde{n}$的定义中,属于运算符$\vee$两边不相容的情形。因为"等于和大于"("或等于和小于")中只能有一个成立,不能同时成立,故称不相容。因此,$\geqslant\tilde{2}$与$\leqslant\tilde{2}$分别用图 2-7 和图 2-8 表示。此外,模糊数 $\tilde{n}_1$ 和 $\tilde{n}_2$ 之间的数也可看成一个模糊数$[\tilde{n}_1,\tilde{n}_2]$:

$$[\tilde{n}_1,\tilde{n}_2] = (\geqslant\tilde{n}_1) \wedge (\leqslant\tilde{n}_2)$$

若 $n_1 < n_2$,则$\geqslant\tilde{n}_1$和$\leqslant\tilde{n}_2$是相容的,故采用扎德算子.

于是$[\tilde{2},\tilde{3}]$可用图 2-9 表示。

因 $\tilde{2}\leqslant\tilde{3}$ 运算符两边相容,故 $\tilde{2}\leqslant\tilde{3} = \tilde{2} \wedge (\leqslant\tilde{3})$的图可由图 2-10 表示,可见 $\tilde{2}\leqslant\tilde{3}$ 与 $\tilde{2}$ 相同。

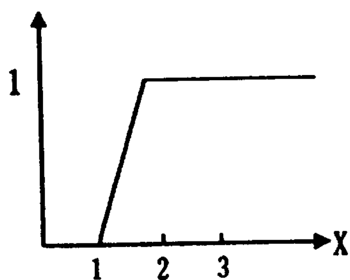


图2-7模糊数≥$\tilde{2}$

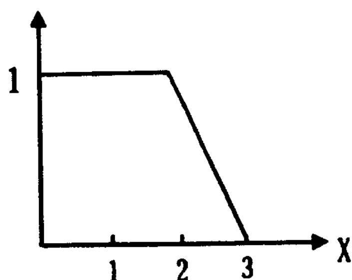


图2-8模糊数≤$\tilde{2}$

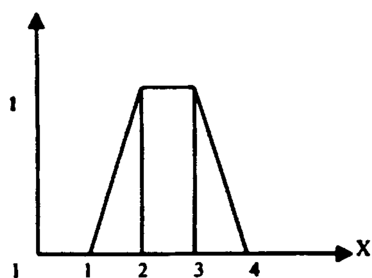


图 2-9 模糊数[$\tilde{2}$，$\tilde{3}$]

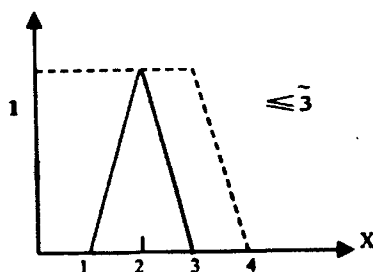


图 2-10 模糊数 $\tilde{2}\leq\tilde{3}$

§2.3 几种特殊的模糊数及有关运算

为了对模糊数的理解，下面介绍几种特殊的模糊数及有关运算。

（一）、区间数

定义 2.3.1 设 $R=(-\infty,+\infty)$ 为实数空间，称 R 上的有限区间 $a=[a^-,a^+]$ 为区间数，区间数全体记作 $I(R)$.

特别，对于任何实数 $a\in R$，$a=[a,a]\in I(R)$. 因此，$R\subset I(R)$

定义 2.3.2 设 $a=[a^-,a^+]$，$b=[b^-,b^+]\in I(R)$.

(1) 如果 $a^-\leqslant b^-$，$a^+\leqslant b^+$，称 a 小于或等于 b，或者，称 b 大于或等于 a，记作 $a\leqslant b$ 或 $b\geqslant a$.

(2) 设 $f:R\times R\rightarrow R$ 为 R 上的一个二元运算，界定 $I(R)$ 上相应的二元运算 f 为：$f(a,b)=\{f(x,y)\mid x\in a,y\in b\}$，$\forall a,b\in I(R)$

如果记 $f=*$，且 $f(x,y)=x*y$，则规定

$a*b=\{x*y\mid x\in a,y\in b\}$

由此定义可得下列命题

命题 1 $\forall a,b\in I(R)$，$k\in R$ 有

$a\vee b=[a^-\vee b^-,a^+\vee b^+]$;

$a\wedge b=[a^-\wedge b^-,a^+\wedge b^+]$;

$a+b=[a^-+b^-,a^++b^+]$;

$a-b=[a^--b^+,a^+-b^-]$;

$a\cdot b=[a^-\cdot b^-\wedge a^-\cdot b^+\wedge a^+\cdot b^-\wedge a^+\cdot b^+,a^-\cdot b^-\vee a^-\cdot$

$b^+ \vee a^+ \cdot b^- \vee a^+ \cdot b^+]$;

$$k \cdot a = \begin{cases} [k \cdot a^-, k \cdot a^+], & k > 0 \\ 0, & k = 0 \\ [k \cdot a^+, k \cdot a^-], & k < 0 \end{cases}$$

$-a \triangleq (-1) \cdot a = [-a^+, -a^-]$;

$$\frac{a}{b} = [\frac{a}{b^-} \wedge \frac{a^-}{b^+} \wedge \frac{a^+}{b^-} \wedge \frac{a^+}{b^+}, \frac{a^-}{b^-} \vee \frac{a^-}{b^+} \vee \frac{a^+}{b^-} \vee \frac{a^+}{b^+}], 0 \overline{\in} b$$

$$b^{-1} \triangleq \frac{1}{b} = [\frac{1}{b} \wedge \frac{1}{b^+}, \frac{1}{b^-} \vee \frac{1}{b^+}], 0 \overline{\in} b.$$

命题 2 $<I(R), \leqslant, \vee, \wedge>$是一个分配格.

命题 3 $<I(R), +>$是一个交换半群,其零元素为 0.

$<I(R), \cdot>$是一个交换半群,其么元素为 1.

命题 4 设 $a, b \in I(R)$,则

(1) $-(-a) = a$

(2) $a \leqslant b$ 当且仅当 $-b \leqslant -a$

(3) $a = -a$ 当且仅当 $a^- = -a^+$

(4) $-(a \vee b) = (-a) \wedge (-b)$, $-(a \wedge b) = (-a) \vee (-b)$

(5) $a - b = a + (-b)$

(6) $a - 0 = a$, $0 - a = -a$

(7) $a - a = 0$ 当且仅当 $a \in R$

命题 5 对于任何 $a, b, c \in I(R)$,有

(1) $(a \vee b) + c = (a + c) \vee (b + c)$

$(a \wedge b) + c = (a + c) \wedge (b + c)$

(2) $(a \vee b) - c = (a - c) \vee (b - c)$

$(a \wedge b) - c = (a - c) \wedge (b - c)$

$c-(a \vee b)=(c-a) \wedge (c-b)$

$c-(a \wedge b)=(c-a) \vee (c-b)$

(3)$(a-b)-c=a-(b+c)$

命题 6 设 $a, b \in I(R), j, k \in R$,则

(1)$1 \cdot a=a, 0 \cdot a=0$

(2)$(jk) \cdot a=j \cdot (k \cdot a)$

(3)$k \cdot (a \vee b)=sgn(k) \cdot (|k| \cdot a \vee |k| \cdot b)$,

$k \cdot (a \wedge b)=sgn(k) \cdot (|k| \cdot a \wedge |k| \cdot b)$,

其中 $sgn(k)=\begin{cases} 1 & ,k>0 \\ 0 & ,k=0 \\ -1 & ,k<0 \end{cases}$

(4)$k \cdot (a+b)=k \cdot a+k \cdot b$

(5)$\frac{a}{b}=a \cdot b^{-1} \quad , \qquad 0 \overline{\in} b$

特别:记 $\overline{I}(R)=\{\overline{a} \mid a \in I(R), \overline{a}=C_a(x)$ 为区间 $[a \ \ , a^+]$ 的特征函数$\}$,则显然 $\overline{I}(R) \subset F(R)$

(二)、[0,1]上的模糊数及其逻辑运算

作为扩张原理的应用,下面介绍[0,1]上的模糊数及其逻辑运算,它是模糊逻辑中关于语言真值的基础。

1.[0,1]上的区间数及其逻辑运算

定义 2.3.3 称[0,1]中的闭区间 $\underline{a} \triangleq [a \ \ , a^+]$ $(0 \leqslant a \leqslant a^+ \leqslant 1)$

为[0,1]上的区间数,[0,1]上的全体区间数记作 $\overline{L}_1$。

在[0,1]中,我们有逻辑运算 $\vee, \wedge, \neg$。

$$\left.\begin{array}{l}\vee:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]\\ \quad(a,b)\to a\vee b\triangleq sup\{a,b\}\\ \wedge:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]\\ \quad(a,b)\to a\wedge b\triangleq inf\{a,b\}\\ \neg:[0,1]\to[0,1]\\ \quad a\to\neg a\triangleq 1-a\end{array}\right\}\qquad(*)$$

$([0,1],\vee,\wedge,\neg)$构成一软代数,按扩张原理可将(*)式扩展到 $\overline{L}_1$ 上。

$$\underline{a}\vee\underline{b}=[a^-,a^+]\vee[b^-,b^+]=\{z\mid\exists(x,y)\in\underline{a}\times\underline{b},z=x\vee y\}$$

$$=[a^-\vee b^-,a^+\vee b^+]$$

$$\underline{a}\wedge\underline{b}=[a^-,a^+]\wedge[b^-,b^+]=\{z\mid\exists(x,y)\in\underline{a}\times\underline{b},z=x\wedge y\}$$

$$=[a^-\wedge b^-,a^+\wedge b^+]$$

$$\neg\underline{a}=\neg[a^-,a^+]=\{z\mid\exists x\in\underline{a},z=\neg x=1-x\}$$

$$=[1-a^+,1-a^-]$$

可以证明,$(\overline{L}_1,\vee,\wedge,\neg)$构成优软代数,(证明见文献[23]191－193)

2.[0,1]上的模糊数及其逻辑运算

定义 2.3.4 [0,1]上的模糊子集 $\underset{\sim}{a}\in F([0,1])$称为[0,1]上的模糊数,当且仅当 $\underset{\sim}{a}$ 满足下列条件:

(1)$a_\lambda=[a_\lambda^-,a_\lambda^+]\in\overline{L}_1,(\forall\lambda\in(0,1])$

(2)$a_1=[a_1^-,a_1^+]\neq\varnothing$

全体[0,1]上的模糊数记作 $\widetilde{L}_1$。

可按照扩张原理来规定 $\widetilde{L}_1$ 中的逻辑运算∨,∧,→。

定义 2.3.5 在 $\widetilde{L}_1$ 中规定逻辑运算如下:

(1)$\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda (a_\lambda \vee b_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda [a_\lambda^- \vee b_\lambda^-, a_\lambda^+ \vee b_\lambda^+]$

(2)$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda (a_\lambda \wedge b_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda [a_\lambda^- \wedge b_\lambda^-, a_\lambda^+ \wedge b_\lambda^+]$

(3)$\neg \underset{\sim}{a} = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda \neg a_\lambda = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda [1 - a_\lambda^+, 1 - a_\lambda^-]$

(4)$\bigwedge_{t \in T} \underset{\sim}{a}^{(t)} = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda (\bigwedge_{t \in T} a_\lambda^{(t)}) = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda [\bigwedge_{t \in T} a_\lambda^{(t)^-}, \bigwedge_{t \in T} a_\lambda^{(t)^+}]$

显然($\widetilde{L}_1$,∨,∧,→)也构成一个优软代数,(这是因为 $\widetilde{L}_1$ 中逻辑运算可以归结为区间数的逻辑运算,且这种运算各自在相同的水平 λ 中进行,因此 $\overline{L}_1$ 中运算规律可以推广到 $\widetilde{L}_1$ 中)。

[0,1]上的模糊数有下列重要结论:

定理 2.3.1 (1)$(\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b})_\lambda = a_\lambda \vee b_\lambda = [a_\lambda^- \vee b_\lambda^-, a_\lambda^+ \vee b_\lambda^+]$

(2)$(\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b})_\lambda = a_\lambda \wedge b_\lambda = [a_\lambda^- \wedge b_\lambda^-, a_\lambda^+ \wedge b_\lambda^+]$

(3)$(\neg \underset{\sim}{a})_\lambda = \neg a_\lambda = [1 - a_\lambda^+, 1 - a_\lambda^-]$

(4)$(\bigvee_{t \in T} \underset{\sim}{a}^{(t)})_\lambda = [\bigvee_{t \in T} a_\lambda^{(t)^-}, \bigwedge_{\alpha < \lambda} (\bigvee_{t \in T} a_\alpha^{(t)^+})]$

(5)$(\bigwedge_{t \in T} \underset{\sim}{a}^{(t)})_\lambda = [\bigvee_{\alpha < \lambda} (\bigwedge_{t \in T} a_\lambda^{(t)^-}), \bigwedge_{t \in T} a_\lambda^{(t)^+}]$,

$\lambda \in (0,1]$

定理 2.3.2 $\underset{\sim}{a} \leqslant \underset{\sim}{b} \Rightarrow a_\lambda^- \leqslant b_\lambda^-, a_\lambda^+ \leqslant b_\lambda^+, \forall \lambda \in (0,1]$。

以上两定理的证明见文献[23]195~197。

(三)等水平模糊数与等核模糊数[7]

定义 2.3.5 $F(R) = \{\underset{\sim}{\alpha} \mid \underset{\sim}{\alpha} : R \to [0,1]\}$ 为模糊数全体,$\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta} \in F(R), \lambda \in [0,1]$,如果 $\forall \lambda' \in [\lambda, 1]$ 都有 $\alpha_{\lambda'} = \beta_{\lambda'}$,则称为 $\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta}$

按水平λ相等或称为λ水平的模糊数，并记$\underset{\sim}{\alpha} \overset{\lambda}{=} \underset{\sim}{\beta}$，特别当$\lambda=1$时，称$\underset{\sim}{\alpha}$与$\underset{\sim}{\beta}$为等核模糊数。

不难验证“$\overset{\lambda}{=}$”是$F(R)$上的等价关系。

定理 2.3.3 设$\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\beta}\in F(R)$，$\lambda\in[0,1]$，则$\underset{\sim}{\alpha} \overset{\lambda}{=} \underset{\sim}{\beta} \Leftrightarrow \underset{\sim}{\alpha}(x)=\underset{\sim}{\beta}(x)$，$\forall x\in \alpha_\lambda \cup \beta_\lambda$

证明：充分性．若$\underset{\sim}{\alpha}(x)=\underset{\sim}{\beta}(x)$，$\forall x\in\alpha_\lambda\cup\beta_\lambda$，则当$\lambda'\geqslant\lambda$时

$$\alpha_{\lambda'}=\alpha_{\lambda'}\cap(\alpha_\lambda\cup\beta_\lambda)=\{x\mid \underset{\sim}{\alpha}(x)\geqslant\lambda', x\in\alpha_\lambda\cup\beta_\lambda\}$$
$$=\{x\mid \underset{\sim}{\beta}(x)\geqslant\lambda', x\in\alpha_\lambda\cup\beta_\lambda\}=\beta_{\lambda'}\cap(\alpha_\lambda\cup\beta_\lambda)=\beta_{\lambda'}$$

故$\underset{\sim}{\alpha} \overset{\lambda}{=} \underset{\sim}{\beta}$

必要性．由于$\underset{\sim}{\alpha} \overset{\lambda}{=} \underset{\sim}{\beta}$，则$\forall\lambda'\in[\lambda,1]$，$\alpha_{\lambda'}=\beta_{\lambda'}$

于是$\alpha_{\lambda'}\cup\beta_{\lambda'}=\alpha_{\lambda'}=\beta_{\lambda'}$。

如果存在$x\in\alpha_\lambda\cup\beta_\lambda=\alpha_\lambda$，使$\underset{\sim}{\alpha}(x)\neq\underset{\sim}{\beta}(x)$，则$\underset{\sim}{\alpha}(x)<\underset{\sim}{\beta}(x)$或$\underset{\sim}{\alpha}(x)>\underset{\sim}{\beta}(x)$，由对称性不妨假设$\underset{\sim}{\alpha}(x)<\underset{\sim}{\beta}(x)$而不失一般性，于是存在$\lambda_0\in(0,1]$使得$\underset{\sim}{\alpha}(x)<\lambda_0<\underset{\sim}{\beta}(x)$，因此，$x\in\beta_{\lambda_0}$，但，$x\notin\alpha_{\lambda_0}$，故$\alpha_{\lambda_0}\neq\beta_{\lambda_0}$，又$\underset{\sim}{\alpha}(x)\geqslant\lambda$，则$\lambda_0\geqslant\lambda$，因而又有$\alpha_{\lambda_0}=\beta_{\lambda_0}$，这就导致矛盾，故$\underset{\sim}{\alpha}(x)=\underset{\sim}{\beta}(x)$，$\forall x\in\alpha_\lambda\cup\beta_\lambda$，证毕．

推论 1 设$\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\beta}\in F(R)$，$\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$，且$\lambda_1<\lambda_2$，则

若$\underset{\sim}{\alpha} \overset{\lambda_1}{=} \underset{\sim}{\beta}$，则$\underset{\sim}{\alpha} \overset{\lambda_2}{=} \underset{\sim}{\beta}$

推论 2 若$\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\beta}$为$\lambda$水平模糊数，则它们是等核模糊数。

推论 3 设$\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\beta}\in F(R)$，则$\underset{\sim}{\alpha}=\underset{\sim}{\beta}$当且仅当$\underset{\sim}{\alpha} \overset{\lambda}{=} \underset{\sim}{\beta}$

定理 2.3.4 设映射

$$\varphi:[0,1]\times F(R)\to P(F(R))\triangleq\{A\mid A\subseteq F(R)\}$$

$(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})\rightarrow\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})=\{\underset{\sim}{\beta}\mid\underset{\sim}{\beta}\underset{=}{\lambda}\underset{\sim}{\alpha}\}$

则 (1) $\forall\,\underset{\sim}{\alpha}\in F(R)$，$\varphi(\cdot,\underset{\sim}{\alpha})$是定义在$[0,1]$上的单增映射，即若 $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$且 $\lambda_1<\lambda_2$ 有 $\varphi(\lambda_1,\underset{\sim}{\alpha})\subseteq\varphi(\lambda_2,\underset{\sim}{\alpha})$，特别

$\varphi(0,\underset{\sim}{\alpha})=\{\underset{\sim}{\alpha}\}$，$\varphi(1,\underset{\sim}{\alpha})=\{\underset{\sim}{\beta}\mid Ker\,\underset{\sim}{\beta}=Ker\,\underset{\sim}{\alpha}\}$

(2)任给 $\lambda\in[0,1]$，对 $\forall\,\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\beta}\in F(R)$，有

$\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})\cap\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\beta})=\varnothing$或 $\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})=\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\beta})$

证明：(1)若 $\underset{\sim}{\beta}\in\varphi(\lambda_1,\underset{\sim}{\alpha})$，则 $\underset{\sim}{\beta}\,\underset{=}{\lambda_1}\underset{\sim}{\alpha}$，由推论 1 知 $\underset{\sim}{\beta}\,\underset{=}{\lambda_2}\underset{\sim}{\alpha}$

故 $\underset{\sim}{\beta}\in\varphi(\lambda_2,\underset{\sim}{\alpha})$，于是有 $\varphi(\lambda_1,\underset{\sim}{\alpha})\subseteq\varphi(\lambda_2,\underset{\sim}{\alpha})$

又如果 $\underset{\sim}{\beta}\in\varphi(0,\underset{\sim}{\alpha})$，则由推论 3 有 $\underset{\sim}{\beta}=\underset{\sim}{\alpha}$，于是得 $\varphi(0,\underset{\sim}{\alpha})=\{\underset{\sim}{\alpha}\}$，再由推论 2 得 $\varphi(1,\underset{\sim}{\alpha})=\{\underset{\sim}{\beta}\mid Ker\,\underset{\sim}{\beta}=Ker\,\underset{\sim}{\alpha}\}$

(2)若 $\underset{\sim}{\alpha}\overset{\lambda}{\neq}\underset{\sim}{\beta}$，则 $\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})\cap\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\beta})=\varnothing$. 事实上，如果存在 $\underset{\sim}{\gamma}\in\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})\cap\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\beta})$，则 $\underset{\sim}{\alpha}\underset{=}{\lambda}\underset{\sim}{\gamma}$且$\underset{\sim}{\gamma}\underset{=}{\lambda}\underset{\sim}{\beta}$，于是 $\underset{\sim}{\alpha}\underset{=}{\lambda}\underset{\sim}{\beta}$，此与 $\underset{\sim}{\alpha}\underset{\neq}{\lambda}\underset{\sim}{\beta}$ 矛盾.

若 $\underset{\sim}{\alpha}\underset{=}{\lambda}\underset{\sim}{\beta}$，则 $\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})=\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\beta})$，事实上，若 $\underset{\sim}{\gamma}\in\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})$，则 $\underset{\sim}{\gamma}\underset{=}{\lambda}\underset{\sim}{\alpha}$，又由 $\underset{\sim}{\alpha}\underset{=}{\lambda}\underset{\sim}{\beta}$，于是 $\underset{\sim}{\gamma}\underset{=}{\lambda}\underset{\sim}{\beta}$，由此得 $\underset{\sim}{\gamma}\in\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\beta})$，故 $\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})\subseteq\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\beta})$，同理可证 $\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\beta})\subseteq\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})$，证毕.

任给 $\lambda\in(0,1]$，令 $F_\lambda=\{\underset{\sim}{\alpha}\mid\underset{\sim}{\alpha}\in F(R),\alpha_\lambda=supp\,\underset{\sim}{\alpha}\}$

$F_\lambda^*=\{\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})\mid\underset{\sim}{\alpha}\in F_\lambda\}$

定理 2.3.5　(1)若 $\lambda_1<\lambda_2$，则 $F_{\lambda_1}\supseteq F_{\lambda_2}$；

(2)若 $\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\beta}\in F_\lambda$，则 $\underset{\sim}{\alpha}=\underset{\sim}{\beta}$ 当且仅当$\underset{\sim}{\alpha}\underset{=}{\lambda}\underset{\sim}{\beta}$

(3)若 $\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\beta}\in F_\lambda$，则 $\underset{\sim}{\alpha}\vee\underset{\sim}{\beta},\underset{\sim}{\alpha}\wedge\underset{\sim}{\beta},\underset{\sim}{\alpha}+\underset{\sim}{\beta},\underset{\sim}{\alpha}-\underset{\sim}{\beta},\underset{\sim}{\alpha}\cdot\underset{\sim}{\beta}$ 均属于 F_λ

证明:(1)若 $\underset{\sim}{\alpha}\in F_{\lambda_2}$,则 $\alpha_{\lambda_2}=supp\ \tilde{\alpha}$,而 $\lambda_1<\lambda_2$,又有 $\alpha_{\lambda_2}\subseteq\alpha_{\lambda_1}\subseteq supp\ \underset{\sim}{\alpha}$,于是则得 $\underset{\sim}{\alpha}\in F_{\lambda_1}$,于是得证 $F_{\lambda_1}\supseteq F_{\lambda_2}$.

(2)$\underset{\sim}{\alpha}=\underset{\sim}{\beta}\Leftrightarrow\underset{\sim}{\alpha}(x)-\underset{\sim}{\beta}(x),\ \forall x\in R\Leftrightarrow\underset{\sim}{\alpha}(x)=\underset{\sim}{\beta}(x),\ \forall x\in supp\ \underset{\sim}{\alpha}\cup supp\ \underset{\sim}{\beta}\Leftrightarrow\underset{\sim}{\alpha}(x)=\underset{\sim}{\beta}(x),\ \forall x\in\alpha_\lambda\cup\beta_\lambda\Leftrightarrow\underset{\sim}{\alpha}\ \underset{=}{\lambda}\ \underset{\sim}{\beta}$(由定理 2.3.3).

(3)设 $*\in\{\vee,\wedge,+,-,\cdot\}$,则 $(\underset{\sim}{\alpha}*\underset{\sim}{\beta})_\lambda=\alpha_\lambda*\beta_\lambda=supp\ \underset{\sim}{\alpha}*supp\ \underset{\sim}{\beta}$. $x\in supp(\underset{\sim}{\alpha}*\underset{\sim}{\beta})\Leftrightarrow\exists\lambda_0\in(0,\lambda]$使

$$(\underset{\sim}{\alpha}*\underset{\sim}{\beta})(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow x\in(\underset{\sim}{\alpha}*\underset{\sim}{\beta})_{\lambda_0}=\alpha_{\lambda_0}*\beta_{\lambda_0}=\alpha_\lambda*\beta_\lambda=supp\ \underset{\sim}{\alpha}*supp\ \underset{\sim}{\beta}.$$

于是有 $supp(\underset{\sim}{\alpha}*\underset{\sim}{\beta})=supp\ \underset{\sim}{\alpha}*supp\ \underset{\sim}{\beta}$.

综上所述得$(\underset{\sim}{\alpha}*\underset{\sim}{\beta})_\lambda=supp(\underset{\sim}{\alpha}*\underset{\sim}{\beta})$,所以 $\underset{\sim}{\alpha}*\underset{\sim}{\beta}\in F_\lambda$,证毕.

推论 4 $F_1=I(R)$.

证明:$\underset{\sim}{\alpha}\in F_1\Leftrightarrow\alpha_1=Ker\ \underset{\sim}{\alpha}=supp\ \underset{\sim}{\alpha}\Leftrightarrow\underset{\sim}{\alpha}\in I(R)$,证毕.

定理 2.3.6 F_λ^* 构成$F(R)$的一个分割,即满足

(1)若 $\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\beta}\in F_\lambda,\underset{\sim}{\alpha}\neq\underset{\sim}{\beta}$,则 $\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})\cap\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\beta})=\varnothing$;

(2)$\bigcup\limits_{\underset{\sim}{\alpha}\in F_\lambda}\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})=F(R)$.

证明:(1)由于 $\underset{\sim}{\alpha}\neq\underset{\sim}{\beta}$ 及定理 2.3.5(2)知 $\underset{\sim}{\alpha}\ \underset{\neq}{\lambda}\ \underset{\sim}{\beta}$,因而由定理 2.3.4(2)的证明知,$\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})\cap\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\beta})=\varnothing$.

(2)显然 $\bigcup\limits_{\underset{\sim}{\alpha}\in F_\lambda}\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})\subseteq F(R)$

又对 $\forall\underset{\sim}{\beta}\in F(R)$,令 $\underset{\sim}{\alpha}(x)=\underset{\sim}{\beta}(x)\wedge I_{\beta_\lambda}(x)$,不难验证 $\underset{\sim}{\alpha_\lambda}\in F_\lambda$ 且$\underset{\sim}{\alpha}\ \underset{=}{\lambda}\ \underset{\sim}{\beta}$,则 $\underset{\sim}{\beta}\in\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})$,于是又有 $F(R)\subseteq\bigcup\limits_{\underset{\sim}{\alpha}\in F_\lambda}\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})$. 证毕.

推论 5 F_1^* 构成 $F(R)$的一个分割。

定理 2.3.7　设 $\underset{\sim}{\gamma}\in\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})$，$\underset{\sim}{\delta}\in\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\beta})$，则 $\underset{\sim}{\gamma}*\underset{\sim}{\delta}\in\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha}*\underset{\sim}{\beta})$.

其中 $*\in\{\vee,\wedge,+,-,\cdot\}$.

证明：因为 $\underset{\sim}{\gamma}\ \underset{=}{\lambda}\ \underset{\sim}{\alpha}$，$\underset{\sim}{\delta}\ \underset{=}{\lambda}\ \underset{\sim}{\beta}$，则 $\underset{\sim}{\gamma}_{\lambda'}=\underset{\sim}{\alpha}_{\lambda'}$，$\underset{\sim}{\delta}_{\lambda'}=\underset{\sim}{\beta}_{\lambda'}$，$\forall\lambda'\in[\lambda,1]$

故 $(\underset{\sim}{\gamma}*\ \underset{\sim}{\beta})_{\lambda'}=\ \underset{\sim}{\gamma}_{\lambda'}*\underset{\sim}{\delta}_{\lambda'}=\underset{\sim}{\alpha}_{\lambda'}*\underset{\sim}{\beta}_{\lambda'}=(\underset{\sim}{\alpha}*\underset{\sim}{\beta})_{\lambda'}$，$\forall\lambda\in[\lambda,1]$

于是 $\underset{\sim}{\gamma}*\underset{\sim}{\delta}\in\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha}*\underset{\sim}{\beta})$.　证毕.

推论 6　若把 $\varphi(1,\alpha)(\alpha\in I(R))$ 中任一模糊数统记成 α_F，则

$$\alpha_F*\beta_F=(\alpha*\beta)_F$$

其中 $*\in\{\vee,\wedge,+,-,\cdot\}$

例如：　$2_F\vee 3_F\vee 5_F=5_F$

$2_F\wedge 3_F\wedge 5_F=2_F$

$5_F\vee[2,7]_F=[5,7]_F$

$[3,8]_F\wedge[4,10]_F=[3,8]_F$

$[4,7]_F+[2,9]_F=[6,16]_F$

$[4,7]_F-[2,9]_F=[-5,5]_F$

$[3,4]_F\cdot[-2,1]_F=[-8,4]_F$

若对任何 $\underset{\sim}{\alpha}\in F_\lambda$，$\underset{\sim}{\beta}\in F_\lambda$，界定

$$\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha})*\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\beta})=\varphi(\lambda,\underset{\sim}{\alpha}*\underset{\sim}{\beta})$$

其中 $*\in\{\vee,\wedge,+,-,\cdot\}$，则由定理 2.3.5，定理 2.3.6，定理 2.3.7 可得：

定理 2.3.8　F_λ 与 F_λ^* 同构，特别 $I(R)$ 与 F_1^* 同构。

(四)梯形模糊数，三角模糊数，$L-R$ 型模糊数.

实数直线 R 上的模糊实数也可按下列方式给出定义：

定义 2.3.6[39] 一个模糊实数 $\overline{N}$ 是实数直线 R 上的一个模糊子集，其隶属函数记为 $\mu(x|\overline{N})$，满足下列条件：

(a)$\mu(x|\overline{N})$是 R 到闭区间$[0,1]$上的连续函数；

(b)对所有 $x\in(-\infty,n_1)$，$\mu(x|\overline{N})=0$；

(c)$\mu(x|\overline{N})$在$[n_1,n_2]$上严格递增；

(d)对所有 $x\in[n_2,n_3]$，$\mu(x|\overline{N})=1$；

(e)$\mu(x|\overline{N})$在$[n_3,n_4]$上严格递减；

(f)对所有 $x\in[n_4,+\infty)$，$\mu(x|\overline{N})=0$.

这里，n_1,n_2,n_3,n_4 为有限实数，且

$$\infty<n_1<n_2\leqslant n_3<n_4<+\infty$$

定义 2.3.6 中的隶属函数 $\mu(x|\overline{N})$可表为

$$\mu(x|\overline{N})=\begin{cases}\mu^{l}(x|\overline{N}), & n_1\leqslant x\leqslant n_2\\ 1\ , & n_2\leqslant x\leqslant n_3\\ \mu^{\gamma}(x|\overline{N}), & n_3\leqslant x\leqslant n_4\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}\qquad(1)$$

其中 $\mu^{l}:[n_1,n_2]\rightarrow[0,1]$

$\mu^{\gamma}:[n_3,n_4]\rightarrow[0,1]$

分别称为模糊实数 $\overline{N}$ 的左、右隶属函数。

模糊实数 $\overline{N}$ 的(弱)α 截集记为$\overline{N}(\alpha)$

$\overline{N}(\alpha)=\{x|\mu(x|\overline{N})\geqslant\alpha\}$，$0<\alpha\leqslant1$.

$\overline{N}(0)$是闭区间$[n_1,n_4]$.

所以 α 截集是一闭区间，故设 $\overline{N}(\alpha)=[n_1(\alpha),n_2(\alpha)]$. $0\leqslant$

$\alpha \leqslant 1$，显然，

$$n_1(0)=n_1, n_1(1)=n_2, n_2(1)=n_3, n_2(0)=n_4.$$

定义 2.3.7[39] 模糊实数 $\overline{N}$ 称为梯形模糊数，它是由下列隶属函数确定的

$$\mu(x|\overline{N})=\begin{cases} \dfrac{x-n_1}{n_2-n_1}, & n_1 \leqslant x \leqslant n_2 \\ 1\ , & n_2 \leqslant x \leqslant n_3 \\ \dfrac{x-n_4}{n_3-n_4}, & n_3 \leqslant x \leqslant n_4 \\ 0\ , & \text{其他} \end{cases} \tag{2}$$

显然，此时 $\overline{N}$ 的左、右隶属函数分别为

$$\mu^l(x|\overline{N})=\frac{x-n_1}{n_2-n_1},$$

$$\mu^\gamma(x|\overline{N})=\frac{x-n_4}{n_3-n_4}.$$

定义 2.3.8[39] 模糊实数 $\overline{N}$ 称为三角形模糊数，它是由下列隶属函数定义的

$$\mu(x|\overline{N})=\begin{cases} =\dfrac{x-n_1}{n_2-n_1}, & n_1 \leqslant x \leqslant n_2 \\ \dfrac{x-n_4}{n_3-n_4}, & n_3 \leqslant x \leqslant n_4 \\ 0\ , & \text{其他} \end{cases} \tag{3}$$

三角形模糊数是梯形模糊数的特殊情况（即(2)中的 $n_2=n_3$）之情形）.其左、右隶属函数分别为 $\mu^l(x|\overline{N})=(x-n_1)/(n_2-n_1)$，$\mu^\gamma(x|\overline{N})=(x-n_4)/(n_3-n_4)$.

显然，以上所定义的模糊数均是正规的，对于非正规模糊实

数，只要将定义中的映射“$R\rightarrow[0,1]$”改为“$R\rightarrow[0,\omega]$，$0\leqslant\omega<1$”，条件“$\mu(x|\overline{N})=1$”改为“$\mu(x|\overline{N})=\omega$，$0<\omega<1$”即可。

现设 $\overline{R}$ 是实模糊数集，$\forall(a,b)\subset(-\infty,\infty)$

令 $F:(a,b)\rightarrow\overline{R}$

$F(t)=\overline{N}(t)$，$a<t<b$，$\overline{N}(t)\in\overline{R}$，$\overline{N}(t)$ 的隶属函数记为 $y=\mu(x|\overline{N}(t))$，它是 t 的函数。类似于定义 2.3.6，设

$$\infty<n_1(t)<n_2(t)\leqslant n_3(t)<n_4(t)<+\infty$$

类似有

$$\mu(x|\overline{N}(t))=\begin{cases}\mu^{\iota}(x|\overline{N}(t)), & n_1(t)\leqslant x\leqslant n_2(t)\\ 1\ , & n_2(t)\leqslant x\leqslant n_3(t)\\ \mu^{\gamma}(x|\overline{N}(t)), & n_3(t)\leqslant x\leqslant n_4(t)\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}\qquad(4)$$

对任意实模糊数 $\overline{N}(t)$，其(弱)α 截集表示为

$\overline{N}(t)(\alpha)=[n_1(t,\alpha),n_2(t,\alpha)]$，其端点是 t 和 α 的函数，$0\leqslant\alpha\leqslant1$。

定义 2.3.9[40] 设 L,R 是$[0,+\infty)$到$[0,1]$上的连续函数，且均是严格递减的，并 $L(0)=R(0)=1$，$L(1)=R(1)-0$，则由从属函数

$$\mu(x|\overline{N}(t))=\begin{cases}L\left(\dfrac{n_2(t)-x}{n_2(t)-n_1(t)}\right), & n_1(t)\leqslant x\leqslant n_2(t)\\ R\left(\dfrac{x-n_2(t)}{n_3(t)-n_2(t)}\right), & n_2(t)\leqslant x\leqslant n_3(t)\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$$

(5)

定义的实模糊数 $\overline{N}(t)$称为 $L-R$ 型模糊数,其中 L,R 分别是 $\overline{N}(t)$的左、右隶属函数。

关于三角模糊数,它在实际应用中人们常采用下列基本运算:

为方便起见,实数集 R 上的三角模糊数记为 M,其隶属函数记为

$$f_M(x)=\begin{cases}\dfrac{x-l}{m-l}, x\in[l,m]\\ \dfrac{x-u}{m-u}, x\in[m,u]\\ 0\ , \quad 其他\end{cases}$$

l,m,u 为实数,简记为$(l,m,u\ ;1)$

设 $M_1=(l_1,m_1,u_1;1),M_2=(l_2,m_2,u_2;1)$

其基本运算规定为:

$M_1+M_2\triangleq(l_1+l_2,m_1+m_2,u_1+u_2;1)$

$M_1\cdot M_2\triangleq(l_1l_2,m_1\ m_2,u_1u_2;1)$

$\lambda\cdot M_1\triangleq(\lambda l_1,\lambda m_1,\lambda u_1;1),\quad \lambda\in R$

$M_1^{-1}\triangleq(\frac{1}{u_1},\frac{1}{m_1},\frac{1}{l_1};1)$

§2.4 模糊数的模糊距离

设 $F_+^*(R)=\{\tilde{a}\mid\tilde{a}\geqslant0,\tilde{a}\in F^*(R)\}$.

定义 2.4.1 映射 $\rho:F^*(R)\times F^*(R)\rightarrow F_+^*(R)$称为一个**模糊距离**

如果 ρ 满足条件:

(1) $\rho(\tilde{a},\tilde{b})\geqslant 0$, $\rho(\tilde{a},\tilde{b})=0$ 当且仅当 $\tilde{a}=\tilde{b}$

(2) $\forall \tilde{c}\in F^*(R)$有

$$\rho(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\rho(\tilde{a},\tilde{c})+\rho(\tilde{c},\tilde{b})$$

若 ρ 是模糊距离,则称$(R,F^*(R),\rho)$为一个模糊度量空间或模糊距离空间。模糊距离有下列重要的性质:

命题 2.4.1　设$(R,F^*(R),\rho)$是一模糊距离空间,则 $\rho(\tilde{a},\tilde{b})=\rho(\tilde{b},\tilde{a})$.

证明:则定义 2.4.1 显然

定理 2.4.1　下式定义的 $\tilde{\rho}$ 是一个模糊数的模糊距离:

对任何 $\tilde{a},\tilde{b}\in F^*(R)$.

$$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[|a_1^- - b_1^-|,\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_\eta^- - b_\eta^-|\vee|a_\eta^+ - b_\eta^+|]$$

易见,若 $a,b\in R$, $\tilde{\rho}(a,b)=|a-b|$

命题 2.4.2　设 $\tilde{a}\in F^*(R)$,则, $\tilde{a}\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},0)$

命题 2.4.3　设 $\tilde{a}\in F_+^*(R)$, $\varepsilon\in[0,\infty)$,则 $\tilde{\rho}(\tilde{a},0)\leqslant\varepsilon$ 当且仅当 $\tilde{a}\leqslant\varepsilon$

定理 2.4.2　设 $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}\in F^*(R)$, $a\in R$,则

(1) $\tilde{\rho}(\tilde{a}+\tilde{b},\tilde{a}+\tilde{c})=\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{c})$

(2) $\tilde{\rho}(\tilde{b}-\tilde{a},\tilde{c}-\tilde{a})=\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{c})$

(3) $\tilde{\rho}(\tilde{a}-\tilde{b},\tilde{a}-\tilde{c})=\tilde{\rho}(-\tilde{b},-\tilde{c})$

(4)若 $a\geqslant 0$,则 $\tilde{\rho}(a\cdot\tilde{a},a\cdot\tilde{b})=a\cdot\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})$

若 $a<0$,则 $\tilde{\rho}(a\cdot\tilde{a},a\cdot\tilde{b})=|a|\cdot\tilde{\rho}(-\tilde{a},-\tilde{b})$

(5)若 $\tilde{a}\leqslant\tilde{b}\leqslant\tilde{c}$,则

$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{c}),\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{c})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{c})$

(6)如果 $\tilde{a}\leqslant\tilde{c}\leqslant\tilde{b},\tilde{a}\leqslant\tilde{d}\leqslant\tilde{b}$,则 $\tilde{\rho}(\tilde{c},\tilde{d})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})$

定理 2.4.3 下列定义的 ρ^* 是一个模糊数的模糊距离:

对任何 $\tilde{a},\tilde{b}\in F^*(R)$.

$$\rho^*(\tilde{a},\tilde{b})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\sup_{0\leqslant\eta\leqslant\lambda}|a_\eta-b_\eta|,\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_\eta^+-b_\eta^+|\vee\sup_{0\leqslant\eta\leqslant 1}|a_\eta-b_\eta^-|\right]$$

易见,若 $a,b\in R,\rho^*(a,b)=|a-b|$.

命题 2.4.4 设 $\tilde{a}\in F^*(R)$,则 $\tilde{a}\leqslant\rho^*(\tilde{a},0)$

若 $\tilde{a}\in F_+^*(R)$,则 $\rho^*(\tilde{a},0)=\tilde{a}$

定理 2.4.4 设 $\tilde{a},\tilde{b}\in F^*(R),\varepsilon\in[0,\infty)$,则 $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\varepsilon$ 当且仅当 $\rho^*(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\varepsilon$.

定理 2.4.5 设 $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}\in F^*(R),a\in R$,则

(1)$\rho^*(\tilde{a}+\tilde{b},\tilde{a}+\tilde{c})=\rho^*(\tilde{b},\tilde{c})$

(2)$\rho^*(\tilde{b}-\tilde{a},\tilde{c}-\tilde{a})=\rho^*(\tilde{b},\tilde{c})$

(3)$\rho^*(\tilde{a}-\tilde{b},\tilde{a}-\tilde{c})=\rho^*(-\tilde{b},-\tilde{c})$

(4)$\rho^*(a\cdot\tilde{a},a\cdot\tilde{b})=\begin{cases}a\rho^*(\tilde{a},\tilde{b}), & \text{当 } a\geqslant 0\\ |a|\rho^*(-\tilde{a},-\tilde{b}), & \text{当 } a<0\end{cases}$

(5)若 $\tilde{a}\leqslant\tilde{b}\leqslant\tilde{c}$,则 $\rho^*(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\rho^*(\tilde{a},\tilde{c})$,

$\rho^*(\tilde{b},\tilde{c})\leqslant\rho^*(\tilde{a},\tilde{c})$

(6)若 $\tilde{a}\leqslant\tilde{c}\leqslant\tilde{b},\tilde{a}\leqslant\tilde{d}\leqslant\tilde{b}$,则 $\rho^*(\tilde{c},\tilde{d})\leqslant\rho^*(\tilde{a},\tilde{b})$

下面仅给出定理 2.4.1 的证明,定理 2.4.3 证法与定理 2.4.1 相仿,其余定理证略,读者可参见文[1]有关章节.

定理 2.4.1 的证明:(1)先证 $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\in F_+^*(R),\tilde{a},\tilde{b}\in F^*(R)$.

由于 $\tilde{a},\tilde{b}\in F^*(R)$,因而 $\tilde{a},\tilde{b}$ 均是正规的,即

$[a_1, a_1^+]\neq\varnothing.[b_1, b_1^+]\neq\varnothing$

于是 $|a_1-b_1^-|\leqslant|a_1-b_1|\vee|a_1^+-b_1^+|$.

因此 $[|a_1-b_1^-|,|a_1^--b_1^-|\vee|a_1^+-b_1^+|]\neq\varnothing$,从而 $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})$是正规的,由 $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})$的定义,$\forall\lambda_1<\lambda_2$.

$[|a_1-b_1|,\sup\limits_{\lambda_2\leqslant\eta\leqslant1}|a_\eta^--b_\eta^-|\vee|a_\eta^+-b_\eta^+|]\subset[|a_1-b_1|,\sup\limits_{\lambda_1\leqslant\eta\leqslant1}|a_\eta-b_\eta|\vee|a_\eta^+-b_\eta^+|]$

于是 $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\in F_+^*(R)$.

(2)下证 $\tilde{\rho}$ 是一个模糊数的模糊距离.

(Ⅰ)$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\geqslant0$,显然成立.

若 $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})=0$,则对 $\forall\lambda\in(0,1]$.

$\sup\limits_{\lambda\leqslant\eta\leqslant1}|a_\eta^--b_\eta^-|\vee|a_\eta^+-b_\eta^+|=0$

从而 $a_\lambda^-=b_\lambda^-,a_\lambda^+=b_\lambda^+$ 即 $\tilde{a}=\tilde{b}$

反过来　若 $\tilde{a}=\tilde{b}$,则 $\forall\lambda\in(0,1]$, $a_\lambda^- = b_\lambda^-$, $a_\lambda^+ = b_\lambda^+$

从而有 $\sup\limits_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_\eta^- - b_\eta^-|\vee|a_\eta^+ - b_\eta^+| = 0$

故有　$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})=0$.

(Ⅱ)对 $\forall\tilde{c}\in F^*(R)$, $\eta\in(0,1]$

$|a_\eta^- - b_\eta^-|\leqslant|a_\eta^- - c_\eta^-| + |c_\eta^- - b_\eta^-|$, $|a_\eta^+ - b_\eta^+|\leqslant|a_\eta^+ - c_\eta^+| + |c_\eta^+ - b_\eta^+|$

则　$|a_\eta^- - b_\eta^-|\leqslant|a_\eta^- - c_\eta^-|\vee|a_\eta^+ - c_\eta^+| + |c_\eta^- - b_\eta^-|\vee|c_\eta^+ - b_\eta^+|$

$|a_\eta^+ - b_\eta^+|\leqslant|a_\eta^- - c_\eta^-|\vee|a_\eta^+ - c_\eta^+| + |c_\eta^- - b_\eta^-|\vee|c_\eta^+ - b_\eta^+|$

因此,对 $\forall\eta\in[\lambda,1]$, $\lambda\in(0,1]$

$|a_\eta^- - b_\eta^-|\vee|a_\eta^+ - b_\eta^+|\leqslant|a_\eta^- - c_\eta^-|\vee|a_\eta^+ - c_\eta^+| + |c_\eta^- - b_\eta^-|\vee|c_\eta^+ - b_\eta^+| \leqslant \sup\limits_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_\eta^- - c_\eta^-|\vee|a_\eta^+ - c_\eta^+| + \sup\limits_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|c_\eta^- - b_\eta^-|\vee|c_\eta^+ - b_\eta^+|$

从而　对 $\forall\lambda\in(0,1]$

$\sup\limits_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_\eta^- - b_\eta^-|\vee|a_\eta^+ - b_\eta^+|\leqslant\sup\limits_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_\eta^- - c_\eta^-|\vee|a_\eta^+ - c_\eta^+| + \sup\limits_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|c_\eta^- - b_\eta^-|\vee|c_\eta^+ - b_\eta^+|$

于是　$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{c})+\tilde{\rho}(\tilde{c},\tilde{b})$

综合以上所证,$\tilde{\rho}$ 是一个模糊数的模糊距离.　　　证毕.

§ 2.5 模糊数的模糊极限

定义 2.5.1　设$\{\tilde{a}_n\}\subset F^*(R)$，$\tilde{a}\in F^*(R)$. 如果对于任意给定的正数 ε 总存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$\rho(\tilde{a}_n,\tilde{a})<\varepsilon$ 成立.

则称$\{\tilde{a}_n\}$依模糊距离 ρ 收敛于 $\tilde{a}$，记为$(\rho)\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$ 或

$\tilde{a}_n\ \underrightarrow{(\rho)}\ \tilde{a}\quad(n\to\infty)$.

定理 2.5.1　设$\{\tilde{a}_n\}\subset F^*(R)$，$\tilde{a}\in F^*(R)$，$\tilde{\rho}$ 和 ρ^* 分别由前面定理 2.4.1 和定理 2.4.3 定义的模糊距离，则$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$ 的充要条件是$(\rho^*)\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$

证明：由定义 2.5.1，$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})<\varepsilon$.

由定理 2.4.4 知，就上述 $\varepsilon>0$，$(\tilde{\rho})(\tilde{a}_n,\tilde{a})<\varepsilon\Leftrightarrow(\rho^*)(\tilde{a}_n,\tilde{a})<\varepsilon$.

从而由定义 2.5.1　$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}\Leftrightarrow(\rho^*)\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$.

证毕.

下面讨论问题中，我们总使用定理 2.4.1 定义的模糊距离.

定理 2.5.2　设

$\{\tilde{a}_n\}\subset F^*(R)$，$\tilde{a}\in F^*(R)$，则$\{\tilde{a}_n\}$依 $\tilde{\rho}$ 收敛于 $\tilde{a}$ 的充要条件是对任意 $\lambda\in(0,1]$，$\{a_{n_\lambda}^-\}$和$\{a_{n_\lambda}^+\}$分别一致收敛于 a_λ^- 和 a_λ^+

证明:因为$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$.所以

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0(N\in R)$,当$n\in R,n\geqslant N$时.

$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})<\varepsilon$.

于是,对$\forall\lambda\in(0,1]$

$|a_{n_\lambda}^- - a_\lambda^-|\leqslant\varepsilon\quad,\quad|a_{n_\lambda}^+ - a_\lambda^+|\leqslant\varepsilon$

从而$\{a_{n_\lambda}^-\},\{a_{n_\lambda}^+\}$关于$\lambda\in(0,1]$分别一致收敛于$a_\lambda^-,a_\lambda^+$.

反之,由于$\{a_{n_\lambda}^-\},\{a_{n_\lambda}^+\}$关于$\lambda\in(0,1]$分别一致收敛于$a_\lambda^-$,$a_\lambda^+$.

所以,$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当$n\geqslant N$时$(n,N\in R)$,对于$\lambda\in(0,1]$.

$$|a_{n_\lambda}^- - a_\lambda^-|<\varepsilon,|a_{n_\lambda}^+ - a_\lambda^+|<\varepsilon \text{ 一致成立}.$$

于是,$|a_{n_1}^- - a_1^-|<\varepsilon,\sup\limits_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_{n_\eta}^- - a_\eta^-|\vee|a_{n_\eta}^+ - a_\eta^+|\leqslant\varepsilon$

故$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda[|a_{n_1}^- - a_1^-|,\sup\limits_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_{n_\eta}^- - a_\eta^-|\vee|a_{n_\eta}^+ - a_\eta^+|]\leqslant\varepsilon$

即$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$.　　证毕.

定理 2.5.3　设$\{\tilde{a}_n\},\{\tilde{b}_n\}\subset F^*(R),\tilde{a},\tilde{b}\in F^*(R),a\in R$,如果

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a},(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$$

则　(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(\tilde{a}_n+\tilde{b}_n)=\tilde{a}+\tilde{b}$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(\tilde{a}_n-\tilde{b}_n)=\tilde{a}-\tilde{b}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a\cdot\tilde{a}_n)=a\cdot\tilde{a}$

证明:(1). 由于 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$, $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$

所以,对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$,使得当 $n\geqslant N$ 时 $(N,n\in R)$

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant\varepsilon/2 \qquad \tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{b})\leqslant\varepsilon/2$$

于是 $\tilde{\rho}(\tilde{a}_n+\tilde{b}_n,\tilde{a}+\tilde{b})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}_n+\tilde{b}_n,\tilde{a}_n+\tilde{b})+\tilde{\rho}(\tilde{a}_n+\tilde{b},\tilde{a}+\tilde{b})=\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{b})+\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})$

$\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

即 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}(\tilde{a}_n+\tilde{b}_n)=\tilde{a}+\tilde{b}$. 证毕.

(2)与(1)方法相仿

(3)当 $a\geqslant 0$ 时,由于 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$ 所以

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$,当 $n\geqslant N$ 时,$(n,N\in R)$

有 $\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant\dfrac{\varepsilon}{a+1}$

于是 $\tilde{\rho}(a\cdot\tilde{a}_n,a\cdot\tilde{a})=a\cdot\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant a\cdot\dfrac{\varepsilon}{a+1}<\varepsilon$.

即 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}(a\cdot\tilde{a}_n)=a\cdot\tilde{a}$

当 $a<0$ 时,由 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$

由定理 2.5.2 $\{a_{n_\lambda}^-\}$ 和 $\{a_{n_\lambda}^+\}$ 关于 $\lambda\in(0,1]$ 分别一致收敛于 a_λ^- 和 a_λ^+.

于是 $\{-a_{n_\lambda}^-\}$ 和 $\{-a_{n_\lambda}^+\}$ 关于 $\lambda\in(0,1]$ 分别一致收敛于 $-a_\lambda^-$

和 $-a_\lambda^+$,从而 $\{-\tilde{a}_n\}$ 依 $\tilde{\rho}$ 收敛于 $-\tilde{a}$,

即对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n\geqslant N$ 时,有

$\tilde{\rho}(-\tilde{a}_n, -\tilde{a})\leqslant\frac{\varepsilon}{|a|}$

由定理 2.4.2 有

$\tilde{\rho}(a\cdot\tilde{a}_n, a\cdot\tilde{a})=|a|\tilde{\rho}(-\tilde{a}_n, -\tilde{a})\leqslant|a|\cdot\frac{\varepsilon}{|a|}=\varepsilon$

即 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$. 证毕。

定理 2.5.4 极限惟一性定理.

设 $\{\tilde{a}_n\}\subset F^*(R)$, $\tilde{a}, \tilde{b}\in F^*(R)$,如果

$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$, $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$

则 $\tilde{a}=\tilde{b}$

证:因为 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$, $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$ 所以

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1>0$,当 $n\geqslant N_1(n, N_1\in R)$时,有

$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n, \tilde{a})<\varepsilon/2$

及 $\exists N_2>0$,当 $n\geqslant N_2(n, N_2\in R)$时,有

$\tilde{\rho}(\tilde{b}_n, \tilde{b})<\varepsilon/2$

取 $N=max\{N_1, N_2\}$,当 $n\geqslant N$ 时 有

$0\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}, \tilde{b})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}, \tilde{a}_n)+\tilde{\rho}(\tilde{a}_n, \tilde{b})<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.

由 ε 的任意性知,$\tilde{\rho}(\tilde{a}, \tilde{b})=0$,即 $\tilde{a}=\tilde{b}$. 证毕.

定理 2.5.5 迫敛性. 设 $\{\tilde{a}_n\}$, $\{\tilde{b}_n\}$, $\{\tilde{c}_n\}\subset F^*(R)$, $\tilde{a}\in F^*(R)$.

如果对于任何 n，有 $\tilde{a}_n \leqslant \tilde{b}_n \leqslant \tilde{c}_n$ 及

$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = (\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty} \tilde{c}_n = \tilde{a}$

则$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty} \tilde{b}_n = \tilde{a}$.

证:因$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = \tilde{a}$，$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty} \tilde{c}_n = \tilde{a}$.所以，

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$正整数 N_1，使当 $n \geqslant N_1$ 时 有

$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n, \tilde{a}) \leqslant \varepsilon/3$

及 $\exists$正整数 N_2，使当 $n \geqslant N_2$ 时有

$\tilde{\rho}(\tilde{c}_n, \tilde{a}) \leqslant \varepsilon/3$

又对任何 n，$\tilde{a}_n \leqslant \tilde{b}_n \leqslant \tilde{c}_n$

则当 $n \geqslant max\{N_1, N_2\}$时，有

$\tilde{\rho}(\tilde{b}_n, \tilde{a}_n) \leqslant \tilde{\rho}(\tilde{a}_n, \tilde{c}_n) \leqslant \tilde{\rho}(\tilde{a}_n, \tilde{a}) + \tilde{\rho}(\tilde{c}_n, \tilde{a})$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = 2\varepsilon/3$$

因此，$\tilde{\rho}(\tilde{b}_n, \tilde{a}) \leqslant \tilde{\rho}(\tilde{b}_n, \tilde{a}_n) + \tilde{\rho}(\tilde{a}_n, \tilde{a}) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

即 $(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty} \tilde{b}_n = \tilde{a}$. 证毕.

注:此定理中的条件“对任何 n 有 $\tilde{a}_n \leqslant \tilde{b}_n \leqslant \tilde{c}_n$”可改为“存在自然数 N_0，当 $n \geqslant N_0$ 时，有 $\tilde{a}_n \leqslant \tilde{b}_n \leqslant \tilde{c}_n$”，此定理结论仍然成立。

定理 2.5.6 有界性定理:设$\{\tilde{a}_n\} \subset F^*(R)$，$\tilde{a} \in F^*(R)$，$\tilde{a}$

$\neq \widetilde{\infty}, \widetilde{a}_n \neq \widetilde{\infty}, n=1,2\cdots$，如果$(\widetilde{\rho})\underset{n\to\infty}{lim}\widetilde{a}_n=\widetilde{a}$，则一定存在$\widetilde{m},\widetilde{M}\in F^*(R)$，使得对任何$n$有：

$$\widetilde{\infty}\neq \widetilde{m}\leqslant \widetilde{a}_n\leqslant \widetilde{M}\neq \widetilde{\infty}$$

证：取$\varepsilon=1$，由于$(\widetilde{\rho})\underset{n\to\infty}{lim}\widetilde{a}_n=\widetilde{a}$，所以，总可以找到正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时，有$\widetilde{\rho}(\widetilde{a}_n,\widetilde{a})\leqslant 1$，于是，对任何$\lambda\in(0,1]$有

$$|a_{n_\lambda}^- - a_\lambda^-|\leqslant 1, |a_{n_\lambda}^+ - a_\lambda^+|\leqslant 1.$$

从而 $a_\lambda^- - 1\leqslant a_{n_\lambda}^- \leqslant a_\lambda^- + 1, a_\lambda^+ - 1\leqslant a_{n_\lambda}^+ \leqslant a_\lambda^+ + 1.$

因此 $\widetilde{a}-1=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_\lambda^-,a_\lambda^+]-1=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_\lambda^- - 1, a_\lambda^+ - 1]\leqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_{n_\lambda}^-, a_{n_\lambda}^+]$

$=\widetilde{a}_n$， 即$\widetilde{a}-1\leqslant\widetilde{a}_n$.

同理可证：$\widetilde{a}_n\leqslant\widetilde{a}+1$.

我们设 $\widetilde{M}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\max_{\widetilde{x}\in\{\widetilde{a}_1,\cdots,\widetilde{a}_N,\widetilde{a}+1\}} x_\lambda^-, \max_{\widetilde{x}\in\{\widetilde{a}_1,\cdots,\widetilde{a}_N,\widetilde{a}+1\}} x_\lambda^+]$,

$\widetilde{m}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\min_{\widetilde{x}\in\{\widetilde{a}_1,\widetilde{a}_2,\cdots,\widetilde{a}_N,\widetilde{a}-1\}} x_\lambda^-, \min_{\widetilde{x}\in\{\widetilde{a}_1,\cdots,\widetilde{a}_N,\widetilde{a}-1\}} x_\lambda^+]$

可以证明$\widetilde{M},\widetilde{m}\in F^*(R)$，且对任何$n$，$\widetilde{m}\leqslant\widetilde{a}_n\leqslant\widetilde{M}$.

证毕.

定理 2.5.7 设$\{\widetilde{a}_n\},\{\widetilde{b}_n\}\subset F_+^*(R)$，$\widetilde{a},\widetilde{b}\in F_+^*(R)$，$\widetilde{a}\neq\widetilde{\infty}$，$\widetilde{b}\neq\widetilde{\infty}$，$\widetilde{a}_n\neq\widetilde{\infty}$，$\widetilde{b}_n\neq\widetilde{\infty}$，$n=1,2,\cdots$

如果$(\widetilde{\rho})\underset{n\to\infty}{lim}\widetilde{a}_n=\widetilde{a}$，$(\widetilde{\rho})\underset{n\to\infty}{lim}\widetilde{b}_n=\widetilde{b}$.则

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\tilde{a}_n\cdot\tilde{b}_n)=\tilde{a}\cdot\tilde{b}$$

证明:因为$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$

所以,由定理2.5.6,存在 $\widetilde{M}\in F_+^*(R)$,$\widetilde{M}\neq\widetilde{\infty}$,使得对任何 n 有

$$\tilde{a}_n\leqslant\widetilde{M}$$

又由于 $\widetilde{M}\neq\widetilde{\infty}$,$\tilde{b}\neq\widetilde{\infty}$,所以存在 $M\in R$,使得

$$\widetilde{M}\leqslant M,\tilde{b}\leqslant M.$$

又由于$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$,$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$,所以

$\forall\varepsilon>0$,$\exists N_1,N_2$,使得 $n\geqslant N_1$ 时.

$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})<\frac{\varepsilon}{2M}$

及　当 $n\geqslant N_2$ 时

$\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{b})<\frac{\varepsilon}{2M}$　　　$(n,N_1,N_2,\in R)$

取 $N=max\{N_1,N_2\}$,当 $n\geqslant N$ 时.

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\tilde{a}_n\cdot\tilde{b}_n,\tilde{a}\cdot\tilde{b})&\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}_n\cdot\tilde{b}_n,\tilde{a}_n\cdot\tilde{b})+\tilde{\rho}(\tilde{a}_n\cdot\tilde{b},\tilde{a}\cdot\tilde{b})\\&=\tilde{a}_n\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{b})+\tilde{b}\cdot\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\\&\leqslant\widetilde{M}\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{b})+\tilde{b}\,\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\end{aligned}$$

$$\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

即 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}(\tilde{a}_n\cdot\tilde{b}_n)=\tilde{a}\cdot\tilde{b}$. 证毕.

推论 2.5.1 设$\{\alpha_n\}\subset R,\alpha\in R,\alpha\geqslant 0,\alpha_n\geqslant 0,n=1,2,\cdots$

$\tilde{a}\in F^*(R),\tilde{a}\neq\tilde{\infty}$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$,则

$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n\cdot\tilde{a})=\alpha\cdot\tilde{a}$.

定理 2.5.8 保号性.设$\{\tilde{a}_n\},\{\tilde{b}_n\}\subset F^*(R),\tilde{a},\tilde{b}\in F^*(R)$.

$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a},(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$,如果对任何 n.

$\tilde{a}_n\leqslant\tilde{b}_n$ (或 $\tilde{b}_n\leqslant\tilde{a}_n$)

则 $\tilde{a}\leqslant\tilde{b}$ (或 $\tilde{b}\leqslant\tilde{a}$)

证明直接由定理 2.5.2 即可得证.

注:此定理的逆不成立.

定理 2.5.9 模糊距离的连续性

设$\{\tilde{a}_n\},\{\tilde{b}_n\}\subset F^*(R),\tilde{a},\tilde{b}\in F^*(R)$,如果$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$,$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$, 则

$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)=\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})$.

证明:由于 $\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})+\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})+\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{b}_n)$

及 $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{a}_n)+\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)+\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{b})$

故由保号性可知结论成立. 证毕.

§ 2.6 模糊数的模糊极限性质

设 A^* 是 $F^*(R)$ 的一个子集类，A^* 有以下性质：

(1)对任何 $A \in A^*$，如果 $B = \{infA_0; A_0 \subset A\}$ 有上界，则 $supB \in F^*(R)$

(2)对任何 $A \in A^*$，如果 $C = \{supA_0; A_0 \subset A\}$ 有下界，则 $infC \in F^*(R)$

显然，A^* 是非空的集类.

定义 2.6.1 设 $\{\tilde{a}_n\} \subset F^*(R)$，如果对于任何 n，$\tilde{a}_n \leqslant \tilde{a}_{n+1}$ 则称 $\{\tilde{a}_n\}$ 是单调增加的模糊数序列.

如果对于任何 n，$\tilde{a}_{n+1} \leqslant \tilde{a}_n$，则称 $\{\tilde{a}_n\}$ 是单调减少的模糊数序列.

定理 2.6.1 单调原理 设 $\{\tilde{a}_n\} \in A^*$.

(1)如果 $\{\tilde{a}_n\}$ 是单调增加的模糊数序列，且 $\{\tilde{a}_n\}$ 存在一个上界 $\widetilde{M}(\widetilde{M} \neq \widetilde{\infty}) \in F^*(R)$，则 $\{\tilde{a}_n\}$ 是收敛的，且 $(\tilde{\rho}) \lim\limits_{n \to \infty} \tilde{a}_n = \sup\limits_{n \geqslant 1} \{\tilde{a}_n\}$

(2)如果 $\{\tilde{a}_n\}$ 是单调减少的模糊数序列，且 $\{\tilde{a}_n\}$ 存在一个下界 $\tilde{m}(\tilde{m} \neq \widetilde{\infty}) \in F^*(R)$，则 $\{\tilde{a}_n\}$ 是收敛的，且 $(\tilde{\rho}) \lim\limits_{n \to \infty} \tilde{a}_n = \inf\limits_{n \geqslant 1} \{\tilde{a}_n\}$

证：(1)由 $\{\tilde{a}_n\} \in A^*$ 及上确界定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，使

$$sup\{\tilde{a}_n\} < \tilde{a}_N + \varepsilon$$

由于$\{\tilde{a}_n\}$单调增加,所以对于 $n \geqslant N$ 时,有

$$\tilde{a}_n \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\{\tilde{a}_n\} \leqslant \tilde{a}_N + \varepsilon \leqslant \tilde{a}_n + \varepsilon$$

于是 $\tilde{\rho}(\tilde{a}_n, \sup_{n\geqslant 1}\{\tilde{a}_n\}) \leqslant \tilde{\rho}(\tilde{a}_n, \tilde{a}_n + \varepsilon) = \tilde{\rho}(\varepsilon, 0) = \varepsilon$

即就是说 $(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = \sup_{n\geqslant 1}\{\tilde{a}_n\}$. 证毕.

(2)与(1)证法相仿.

定义 2.6.2 设 $\tilde{a}, \tilde{b} \in F^*(R)$, $\tilde{a} \leqslant \tilde{b}$,我们界定

$$[\tilde{a}, \tilde{b}] \triangleq \{\tilde{x} \mid \tilde{a} \leqslant \tilde{x} \leqslant \tilde{b}, \tilde{x} \in F^*(R)\},$$

称$[\tilde{a}, \tilde{b}]$为一个模糊的闭区间.

定理 2.6.2 闭区间套定理: 设$\{[\tilde{a}_n, \tilde{b}_n]\}$是 A^* 的一个闭区间序列,如果它有性质:(1)$\tilde{a}_n \leqslant \tilde{a}_{n+1} \leqslant \tilde{b}_{n+1} \leqslant \tilde{b}_n$, $n = 1, 2\cdots$, $\tilde{a}_1 \neq \widetilde{\infty}$, $\tilde{b}_1 \neq \widetilde{\infty}$;

(2)$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n, \tilde{b}_n) \xrightarrow{\tilde{\rho}} 0 (n \to \infty)$

则:$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \tilde{b}_n \triangleq \tilde{a} \in F^*(R)$,且 $\tilde{a}$ 是这些闭区间的惟一公共点.

证:由定理的条件有

$$\tilde{a}_1 \leqslant \tilde{a}_2 \leqslant \cdots \leqslant \tilde{a}_n \cdots \leqslant \tilde{b}_1$$

$$\tilde{a}_1 \leqslant \cdots \leqslant \tilde{b}_n \leqslant \cdots \leqslant \tilde{b}_2 \leqslant \tilde{b}_1$$

因而,$\{\tilde{a}_n\}$是有上界 $\tilde{b}_1$ 的单调增加模糊数序列,$\{\tilde{b}_n\}$是有下

界 $\widetilde{a}_1$ 的单调减少模糊数序列，由定理 2.6.1 可得：

$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{a}_n = \sup_{n\geq 1}\{\widetilde{a}_n\}$

$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{b}_n = \inf_{n\geq 1}\{\widetilde{b}_n\}$

于是，对任何正整数 k.

$\widetilde{a}_k \leqslant (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{a}_n, (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{b}_n \leqslant \widetilde{b}_1$

则由定理 2.5.8 有

$\widetilde{a}_k \leqslant (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{a}_n \leqslant \widetilde{b}_k, \widetilde{a}_k \leqslant (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{b}_n \leqslant \widetilde{b}_k, k = 1,2\cdots$

因此，对任何正整数 k,

$\widetilde{\rho}((\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{a}_n, (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{b}_n) \leqslant \widetilde{\rho}(\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k)$

由定理 2.5.9 可得：

$0 \leqslant \widetilde{\rho}((\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{a}_n, (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{b}_n) \leqslant (\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\widetilde{\rho}(\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k) = 0$

从而 $(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{a}_n = (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{b}_n \triangleq \widetilde{a}$

因为 $\widetilde{a} = \sup_{n\geq 1}\{\widetilde{a}_n\} = \inf_{n\geq 1}\{\widetilde{b}_n\}$，所以

$\widetilde{a} \in F^*(R)$ 且 $\widetilde{a} \in [\widetilde{a}_n, \widetilde{b}_n], n = 1,2,\cdots$

下证惟一性，假设还存在 $\widetilde{a'} \in F^*(R)$，且 $\widetilde{a'} \in [\widetilde{a}_n, \widetilde{b}_n], n = 1,2,\cdots$

于是，对于任何正整数 n,

$0 \leqslant \widetilde{\rho}(\widetilde{a}, \widetilde{a'}) \leqslant \widetilde{\rho}(\widetilde{a}_n, \widetilde{b}_n)$

从而 $0 \leqslant \widetilde{\rho}(\widetilde{a}, \widetilde{a'}) \leqslant (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{\rho}(\widetilde{a}_n, \widetilde{b}_n) = 0$

即 $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{a}')=0$

亦即 $\tilde{a}=\tilde{a}'$. 证毕.

定义 2.6.3 设$\{\tilde{a}_n\}\subset F^*(R)$,且$\{\tilde{a}_n\}$是有界的,我们界定

$(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{a}_n=(\tilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geqslant k}\{\tilde{a}_n\}$,$(\tilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{a}_n=(\tilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\inf_{n\geqslant k}\{\tilde{a}_n\}$

分别称 $(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{a}_n$ 和$(\tilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{a}_n$ 为$\{\tilde{a}_n\}$的上极限和下极限.

定理 2.6.3 设$\{\tilde{a}_n\}\in A^*$,$\tilde{a}\in F^*(R)$,则 $(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$ 的充分必要条件是 $(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{a}_n=(\tilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{a}_n=\tilde{a}$.

命题 2.6.1 设$\{\tilde{a}_n\}\subset F^*(R)$,$\tilde{a}\in F^*(R)$,如果$(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{a}_n=\tilde{a}$(或$(\tilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{a}_n=\tilde{a}$),则存在$\{\tilde{a}_n\}$的一个子序列$\{\tilde{a}_{n_i}\}$使

$$(\tilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\tilde{a}_{n_i}=\tilde{a}.$$

以上两定理的证明从略,(证明详见文[1],79-81).

定义 2.6.4 设$\{\tilde{a}_n\}\subset F^*(R)$,则$\{\tilde{a}_n\}$称为基本模糊数序列,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个正整数 N,使得当 $n,m\geqslant N$ 时有 $\tilde{\rho}(\tilde{a}_m,\tilde{a}_n)\leqslant\varepsilon$ 成立.

定理 2.6.4 *Cauchy* 收敛原理

设$\{\tilde{a}_n\}\in A^*$,则$\{\tilde{a}_n\}$是收敛的充分必要条件是$\{\tilde{a}_n\}$是基本模糊数序列.

证明:必要性:显然

充分性: $\forall\varepsilon>0$,令 $m=N+1$,则当 $n\geqslant N$ 时,

$$\widetilde{\rho}(\widetilde{a}_n, \widetilde{a}_{N+1}) \leqslant \varepsilon$$

因此,当 $n \geqslant N$ 时

$$\widetilde{a}_{N+1} - \varepsilon \leqslant \widetilde{a}_n \leqslant \widetilde{a}_{N+1} + \varepsilon .$$

于是 $\widetilde{a}_{N+1} - \varepsilon \leqslant \inf\limits_{k \geqslant n} \{\widetilde{a}_k\} \leqslant \sup\limits_{k \geqslant n} \{\widetilde{a}_k\} \leqslant \widetilde{a}_{N+1} + \varepsilon .$

从而 $\widetilde{a}_{N+1} - \varepsilon \leqslant (\widetilde{\rho}) \varliminf\limits_{n \to \infty} \widetilde{a}_n \leqslant (\widetilde{\rho}) \varlimsup\limits_{n \to \infty} \widetilde{a}_n \leqslant \widetilde{a}_{N+1} + \varepsilon$

故 $\widetilde{\rho}((\widetilde{\rho}) \varliminf\limits_{n \to \infty} \widetilde{a}_n, (\widetilde{\rho}) \varlimsup\limits_{n \to \infty} \widetilde{a}_n) \leqslant \widetilde{\rho}(\widetilde{a}_{N+1} - \varepsilon, \widetilde{a}_{N+1} + \varepsilon) \leqslant 2\varepsilon$

由 ε 的任意性知,$(\widetilde{\rho}) \varlimsup\limits_{n \to \infty} \widetilde{a}_n = (\widetilde{\rho}) \varliminf\limits_{n \to \infty} \widetilde{a}_n = \widetilde{a} \in F^*(R)$

由定理2.6.3知 $(\widetilde{\rho}) \lim\limits_{n \to \infty} \widetilde{a}_n = \widetilde{a}$. 证毕.

定义 2.6.5 设 $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in F^*(R)$, $\widetilde{a} < \widetilde{b}$,我们界定

$(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = \{\widetilde{x} \mid \widetilde{a} < \widetilde{x} < \widetilde{b}, \widetilde{x} \in F^*(R)\}$

称$(\widetilde{a}, \widetilde{b})$为一个模糊数的开区间.

定义 2.6.6 设 $A \subset F^*(R)$,F 是模糊数的开区间构成的一个非空类,称 F 覆盖了 A,如果对于任何 $\widetilde{a} \in A$,存在至少一个开区间 $\widetilde{O} \in F$ 使得 $\widetilde{a} \in \widetilde{O}$.

定义 2.6.7 设 $A \subset F^*(R)$,$\widetilde{a} \in F^*(R)$,如果对于任意给

定的 $\varepsilon>0$,$(\tilde{a}-\varepsilon,\tilde{a}+\varepsilon)$含有无穷多个属于 A 的模糊数,则称 $\tilde{a}$ 为A 的聚点。

定理2.6.5 $\tilde{a}$ 是A 的聚点的充分必要条件是A 中有一串互不相同的模糊数 $\tilde{a}_n$,使得$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$

证:必要性 设 $\tilde{a}$ 是A 的聚点,由聚点的定义知,在$(\tilde{a}-1,\tilde{a}+1)$中有无穷多个属于 A 的模糊数,我们从中取一个不等于 $\tilde{a}$ 的模糊数,记之为 $\tilde{a}_1$,考虑开区间$(\tilde{a}-\frac{1}{2},\tilde{a}+\frac{1}{2})$,由于其中也包含了无穷多个属于 A 的模糊数,所以可以取其中一个不等于 $\tilde{a}$ 又不等于 $\tilde{a}_1$ 的模糊数,记之为 $\tilde{a}_2$.

一般地,如果互不相同,不等于 $\tilde{a}$ 又属于A 的模糊数$\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n$ 已经选出,则考虑开区间$(\tilde{a}-\frac{1}{n+1},\tilde{a}+\frac{1}{n+1})$中的属于 A 的模糊数还是有无穷多个,所以,可取一个不同于 $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2\cdots,\tilde{a}_n$ 的模糊数,记为 $\tilde{a}_{n+1}$,这样,我们可以得到一个属于 A 的互不相同的模糊数组成的序列$\{\tilde{a}_n\}$,且 $\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}-\frac{1}{n},\tilde{a}+\frac{1}{n})\leqslant\frac{2}{n}$

因此 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$

充分性:设$\{\tilde{a}_n\}$是属于 A 的互不相同的模糊数所构成的序列,且$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$ 则

$\forall\varepsilon>0,\exists N$,使当 $n\geqslant N$ 时,$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant\varepsilon$

从而 $\tilde{a}-2\varepsilon<\tilde{a}_n<\tilde{a}+2\varepsilon$

即 $\tilde{a}_n$ 属于开区间$(\tilde{a}-2\varepsilon,\tilde{a}+2\varepsilon)$ （注意下标 $n\geqslant N$ 的模糊数$\tilde{a}_n$ 是无穷多个），所以，$(\tilde{a}-2\varepsilon,\tilde{a}+2\varepsilon)$中确实包含 A 中无穷多个模糊数，由 ε 的任意性，所以，$\tilde{a}$ 是A 的聚点. 证毕.

定义 2.6.8 设 $A\subset F^*(R)$，$\tilde{a}$，$\tilde{b}\in A$ 及 $\tilde{a}\leqslant\tilde{b}$，称 A 为 M—闭区间，记为$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$，如果对任何 $\tilde{c}$，$\tilde{d}\in A$ 满足下列性质：

(1)$\tilde{a}\leqslant\tilde{c}\leqslant\tilde{d}\leqslant\tilde{b}$

(2)$\frac{\tilde{c}+\tilde{d}}{2}\in A$

定理 2.6.6 有限覆盖定理. 设$[\tilde{a},\tilde{b}]^*\subset F^*(R)$，如果对于任何 $A\subset[\tilde{a},\tilde{b}]^*$，有 $A\in A^*$，$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$是有界集，且能够被一族开区间 F 覆盖，则一定存在有限多个开区间 $\tilde{O}_i\in F$，$i=1,2,\cdots,n$，使$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$能够被 $F'=\{\tilde{O}_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$所覆盖.

证明：反证法：假设$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$不能被 F 中有限多个开区间所覆盖，则在 M-闭区间$[\tilde{a},\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2}]^*$和$[\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2},\tilde{b}]^*$中至少有一个不能被 F 中有限个开区间所覆盖，不妨假设$[\tilde{a},\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2}]^*$不能被 F 中有限多个开区间所覆盖，并记之为$[\tilde{a}_1,\tilde{b}_1]^*$.（即 $\tilde{a}_1=\tilde{a}$，$\tilde{b}_1=\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2}$），且有

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_1,\tilde{b}_1)=\tilde{\rho}(\tilde{a},\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2})=\frac{1}{2}\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})$$

同理,在 M—闭区间$[\tilde{a}_1,\frac{\tilde{a}_1+\tilde{b}_1}{2}]^*$和$[\frac{\tilde{a}_1+\tilde{b}_1}{2},\tilde{b}_1]^*$中至少有一个不能被 F 中有限个开区间所覆盖,不妨设为$[\tilde{a}_1,\frac{\tilde{a}_1+\tilde{b}_1}{2}]^*$,并记之为$[\tilde{a}_2,\tilde{b}_2]^*$. 且有: $\tilde{\rho}(\tilde{a}_2,\tilde{b}_2)=\tilde{\rho}(\tilde{a}_1,\frac{\tilde{a}_1+\tilde{b}_1}{2})=\frac{1}{2}\tilde{\rho}(\tilde{a}_1,\tilde{b}_1)=\frac{1}{2^2}\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})$.

如此,继续下去便可得$\{[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]^*\}$且

(1)$\tilde{a}\leqslant\tilde{a}_1\leqslant\tilde{a}_2\leqslant\cdots\leqslant\tilde{a}_n\leqslant\cdots\leqslant\tilde{b}_n\leqslant\cdots\leqslant\tilde{b}_2\leqslant\tilde{b}_1\leqslant\tilde{b}$;

(2)$\rho(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)=\frac{1}{2^n}\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b}),(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)=0$

因此,我们由定理 2.6.2 知,存在惟一的模糊数 $\tilde{c}\in[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]^*$, $n=1,2\cdots$,依照$[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]^*$的定义,$\tilde{c}$ 不能被 F 中有限个开区间所覆盖.

另一方面,由于 $\tilde{c}\in[\tilde{a},\tilde{b}]^*$,$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$又能被 F 所覆盖,因而必存在 $\tilde{O}\in F$,使得 $\tilde{c}\in\tilde{O}$,产生矛盾.

故 说明$[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]^*$能被 F 中有限个开区间所覆盖. 证毕.

定理 2.6.7 聚点原理

设$[\tilde{a},\tilde{b}]^*\subset F^*(R)$,$A\subset[\tilde{a},\tilde{b}]^*$,$A\in A^*$,$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$是有界集,若 A 是一个无穷集合,则 A 至少有一个聚点.

证明:略

推论 2.6.1 若$\{\tilde{a}_n\}\subset[\tilde{a},\tilde{b}]^*$,且$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$为有界集,则存在一个$\{\tilde{a}_n\}$的子序列$\{\tilde{a}_{n_k}\}$,使得$\{\tilde{a}_{n_k}\}$是收敛的.

证明:略

推论 2.6.2 设$\{\tilde{a}_n\}\subset[\tilde{a},\tilde{b}]^*$,$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$为有界集,且$\tilde{a}_n$互不相同,则$\{\tilde{a}_n\}$收敛的充分必要条件是$\{\tilde{a}_n\}$只有一个聚点.

证明:由定理 2.5.4 定理 2.6.5 和定理 2.6.7 可直接得证.

§2.7 模糊数空间及其有关重要性质简介

本节中介绍的定义及有关定理详见文献[37].

一、模糊数空间中的运算及度量

定义 2.7.1 记 $E^n=\{u \mid u:\ R^n\to[0,1]$满足以下性质①~④$\}$

①u 是正规的模糊集,即$\exists\, x_0\in R^n, s.t.\ u(x_0)=1$;

②u 是凸模糊集;

③u 是上半连续函数;

④$[u]^0=\overline{\{x\in R^n \mid u(x)>0\}}$是紧集.

对于 $u\in E^n$称之为模糊数,E^n 称为模糊数空间.

$\forall\, u\in E^n,\gamma\in(0,1]$,记$[u]^\gamma=\{x \mid u(x)\geqslant\gamma\}$.

定理 2.7.1 若 $u\in E^n$,则

①对 $\gamma\in[0,1]$,$[u]^\gamma$ 均为R^n 中非空紧凸集.

②若 $0\leqslant\gamma_1\leqslant\gamma_2\leqslant1$,则$[u]^{\gamma_2}\subset[u]^{\gamma_1}$

③若正数 γ_n 非降收敛于 $\gamma\in(0,1]$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[u]^{\gamma_n}=[u]^{\gamma}$

反之，若对任何 $\gamma\in(0,1]$，均存在 $A^{\gamma}\subset R^n$ 满足相应的①～③，则有惟一的模糊数 $u\in E^n$，使 $Z[u]^{\gamma}=A^{\gamma}$. $\gamma\in(0,1]$，且 $[u]^0=\overline{\bigcup_{\gamma\in(0,1]}[u]^{\gamma}}\subset A^0$

推论：对 $u\in E^n$，定义 $F(u):[0,1]\to(P_k(R^n),d)$；

$$\gamma\to[u]^{\gamma}$$

则 $F(u)$ 于 $t\in(0,1]$ 是左连续的，于 $t=0$ 处右连续且除至多可数个点外 $F(u)$ 连续.

此处 $P_k(R^n)$ 是 R^n 中非空紧凸集全体之集，d 是 $Hausdorff$ 度量，即：

$d(A,B)=inf\{\varepsilon\mid N(A,\varepsilon)\supset B,N(B,\varepsilon)\supset A\}$

$N(A,\varepsilon),N(B,\varepsilon)$ 分别为 A,B 的 ε 邻域.

定义 2.7.2　$\forall u,v\in E^n,k\in R$，引入 E^n 的加法和数乘如下：

$(u+v)(x)=\sup_{s+t=x}min(u(s),v(t))$

$(k\,u)(x)=u(x/k),k\neq0$ 时；$(ou)=\hat{O}$，

其中 $\hat{O}(x)=1,x=0$ 时；$\hat{O}(x)=0,x\neq0$ 时.

定理 2.7.2　若 $u,v\in E^n,k\in R$，则 $[u+v]^{\gamma}=[u]^{\gamma}+[v]^{\gamma}$，$[ku]^{\gamma}=k[u]^{\gamma}$

定理 2.7.3　对 $u\in E^1$，以 $\underline{u}(\gamma),\overline{u}(\gamma)$ 记 $[u]^{\gamma}$ 的下、上端点，则

$\underline{u}(\gamma),\overline{u}(\gamma)$ 均为 $[0,1]$ 上的函数且满足

(1) $\underline{u}(\gamma)$ 单调非降左连续；

(2)$\overline{u}(\gamma)$单调非增左连续;

(3)$\overline{u}(1)\geqslant \underline{u}(1)$

(4)$\underline{u}(\gamma),\overline{u}(\gamma)$在 $\gamma=0$ 右连续

反之,对任何满足上述条件(1)～(4)的[0,1]上的函数 $a(\gamma),b(\gamma)$,存在惟一的 $u\in E^1$,使$[u]^\gamma=[a(\gamma),b(\gamma)],\gamma\in[0,1]$

定理 2.7.4　在 E^n 中,定义 $D:E^n\times E^n\rightarrow[0,+\infty)$

$D(u,v)=\sup\limits_{\gamma\in[0,1]} d([u]^\gamma,[v]^\gamma)$,

$d([u]^\gamma,[v]^\gamma)$是 *Hausdorff* 度量.

则:(1)(E^n,D)为完备度量空间

(2)$D(\lambda u,\lambda v)=|\lambda|D(u,v),\lambda\in R$

(3)$D(u+w,v+w)=D(u,v)$

由度量 D 引出的拓扑结构称为一致 *Hausdorff* 度量结构,D 称为一致 *Hausdorff* 度量.

二、模糊数的嵌入定理

定理 2.7.5　存在 *Banach* 空间$(X,\|\cdot\|)$及 $j:E^n\rightarrow X$,使得 $j(E^n)$为 X 中顶点为 θ 的闭凸锥且满足

(1)j 是等距的,即 $\|j(u)-j(v)\|=D(u,v),u,v\in E^n$;

(2)$j(su+tv)=sj(u)+tj(v),u,v\in E^n,s,t\geqslant 0$;

(3)$\overline{j(E^n)-j(E^n)}=X$

如定义　$j:E^n\rightarrow X;u\rightarrow\widetilde{(u,\hat{o})}$

则易知 *Banach* 空间$(X,\|\cdot\|)$及嵌入算子 j 满足定理要求.

定义 2.7.3　对 $u\in E^n$,u 的支撑函数 u^* 定义为

$u^*(r,x)=\sup\limits_{a\in[u]^r}\langle a,x\rangle,(r,x)\in I\times S^{n-1}$，其中 $I=[0,1]$，S^{n-1}为 R^n 的单位球面，$\langle\cdot,\cdot\rangle$是 R^n 中的内积.

定理 2.7.6 u^*满足以下性质

(1)$u^*(r,x+y)\leqslant u^*(r,x)+u^*(r,y)$;

(2)$u^*(r,kx)=ku^*(r,x),k\geqslant 0$;

(3)u^*于 $I\times S^{n-1}$上一致有界且$|u^*(r,x)|\leqslant\sup\limits_{a\in[u]^0}\|a\|$

(4)对任何 $x\in S^{n-1}$，$u^*(\cdot,x)$关于 r 非增左连续且在 $r=0$ 处右连续;

(5)$u^*(r,\cdot)$关于 x *Lipschitz* 连续对 $r\in I$ 一致成立，即

$|u^*(r,x)-u^*(r,y)|\leqslant(\sup\limits_{a\in[u]^0}\|a\|)\|x-y\|$;

(6)对任何 $r\in I,u,v\in E^n$，

$d([u]^r,[v]^r)=\sup\limits_{x\in S^{n-1}}|u^*(r,x)-v^*(r,x)|$.

定理 2.7.7 对 $u\in E^n$，定义 $j_m(u):r\to u^*(r,\cdot)\in C(S^{n-1})$，

则 $j_m(u)\in\overline{C}(I,C(S^{n-1}))$且

(1)$j_m(su+tv)=sj_m(u)+tj_m(v),u,v\in E^n,s,t\geqslant 0$;

(2)$\|j_m(u)-j_m(v)\|=D(u,v),u,v\in E^n$;

(3)$j_m(E^n)$是 $\overline{C}(I,C(S^{n-1}))$中的闭集。

本节所列出的定理证明详见文献[37].

§2.8 模糊数的应用举例

模糊实数在实际中有着广泛的应用，应用范围甚广，下面仅举

2 案例来说明之.

例 1,模糊环境下带有平衡条件的投资项目评估与选择方法问题:

问题的提出:随着市场经济的发展,各地有着许多各种各样的项目需要投资开发,在投资数额有限的情况下,就需要对诸多项目进行评估和选择。投资项目的评估和选择要依赖于决策成员(决策者)的主观经济判断和定性描述,既便是某些定量指标的评估也往往由于客观情况的复杂性也难以得到精确的数据,从而使整个评价和选择过程带有极大的模糊性。因此,现实生活中的许多投资项目的评估与选择都可归属于模糊环境下带有平衡约束条件的问题。

模型

1.多因素评价模型

设 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 为备选的投资项目集, $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 为评估指标集(因素集), $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_k\}$ 为决策群,G 中每个成员 G_t 对每个项目 P_i 关于评价指标集 C 中的每个因素 C_j 进行单一因素评价。

设自然评语集 $E=\{E_1,E_2,\cdots,E_h\}$,其中 $E_1,E_2,\cdots,E_h$ 均为语言变量,一般可以用模糊数来刻划。

设决策者 G_t 对项目 P_i 关于评价因素 C_j 的评语值为 $Eijt$(它是一模糊数)

决策群对项目 P_i 关于 C_j 的单因素 *Fuzzy* 评价为$\bar{E}ij$(其确定方法为:若每个决策者的地位相同,从而决策群对项目 P_i 关于 C_j 的单因素评价为$\bar{E}ij$(即取平均值);若决策者间地位不同,即有权

重比例，则按加权平均法得到$\bar{E}ij$)；

设评语集 $C=(C_1,C_2,\cdots C_m)$的权重向量为$(W_1,W_2,\cdots,W_m)$，它表示了每个因素 C_j 在项目总体中的相对重要性，满足 $W_i>0$，且$\sum_{i=1}^{n}W_i=1$，它可用 AHP 方法得到。采用加权平均法，可得决策群对项目 P_i 的多因素综合模糊评价指标—模糊贡献指标 FI_i

$$FI_i=W_1\odot\bar{E}_{i1}\oplus W_2\odot\bar{E}_{i2}\oplus\cdots\oplus W_m\odot\bar{E}_{im} \quad (1\cdot1)$$

其中$\oplus$为 $Fuzzy$ 数的加法运算，$\odot$为 $Fuzzy$ 数的数乘运算

2.规划模型

一般地，除了总投资预算约束外，我们考虑 T 个平衡条件：$EC_1,EC_2,\cdots EG_T$，每个平衡条件 EC_l 都构成备选方案集 P 的一个划分 $P_{l_1},P_{l_2},\cdots,P_{lq_t}$，$P=\bigcup_{j=1}^{q_t}P_{lj}$，并要求在划分子集 P_{lj}中要求有 b_{lj}个项目必须入选（$j=1,2\cdots q_t,t=1,2,\cdots,T$）

而选择的目标是使项目的总体效益最大化。

引入决策变量 $x_i=\begin{cases}1 & \text{若项目 } P_i \text{ 入选}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$

则我们的目标是极大总体贡献指标

$$max\sum_{i=1}^{n}FI_i\cdot x_i$$

投资预算约束为：$\sum_{i=1}^{n}e_i\cdot x_i\leqslant b_0$

其中 e_i 为项目 p_i 的所需投资额，b_0 为总投资预算额，而第 l

个平衡条件 EC_l 则可描述为：

$$\sum_{i \in p_{ls}} x_i = b_{l_j} \qquad (j = 1,2,\cdots q_l; l = 1,2,\cdots T)$$

因而，带有平衡条件的项目选择问题可用下列模型描述

$$max \sum_{i=1}^{n} FI_i \cdot x_i \qquad (2 \cdot 1)$$

$$s \cdot t \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot x_i \leqslant b_0 \\ \sum_{i \in p_{ls}} x_i = b_{l_j} \qquad (j = 1,2,\cdots q_l; l = 1,2,\cdots T) \\ x_i \in \{0,1\} \qquad (i = 1,2,\cdots n) \end{cases} \qquad (2 \cdot 2)$$

在(2·1)式中系数 FI_i 为模糊数，因此上述问题是带有模糊数系数的模糊整数规划问题。

模型的解法

1、模糊数的排序方法

为求解模糊整数规划问题(2·1)～(2·2)，首先涉及到模糊数的大小排序问题，现有的模糊数的排序方法有多种，下面给出一种较为简便而又有效的方法。

为了方便应用．R 上模糊实数采用下列定义：

定义 1　R 上的一个模糊数 $\tilde{a}$ 是 R 上的模糊子集，其隶属函数 f_a 满足下列条件：

(1) f_a 是 R 到闭区间 $[0,\omega]$ 上的连续函数，$0 \leqslant \omega \leqslant 1$；

(2) $\forall x \in (-\infty, a), f_a(x) = 0$；

(3) f_a 在 $[a,b]$ 上严格递增;

(4) $\forall x\in[b,c], f_a(x)=1$;

(5) f_a 在 $[c,d]$ 上严格递减;

(6) $\forall x\in[d,+\infty], f_a(x)=0$

$$\text{即}: f_a(x)=\begin{cases} f_a^l(x), & x\in[a,b] \\ 1, & x\in[b,c] \\ f_a^r(x), & x\in[c,d] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中: $f_a^l:[a,b]\rightarrow[0,1]$ 称 $\tilde{a}$ 的左隶属函数

$f_a^r:[c,d]\rightarrow[0,1]$ 称 $\tilde{a}$ 的右隶属函数.

由定义 1 可知, f_a^l, f_a^r 分别为严格递增和严格递减函数,因此它们的反函数均存在,记为 g_a^l, g_a^r

显然: $g_a^l:[0,1]\rightarrow[a,b]$ 是连续且严格递增的;

$g_a^r:[0,1]\rightarrow[c,d]$ 是连续且严格递减的.

特别当 $a=b$ 时, $f_a^l(x)=f_a^r(b)=1$, 则对 $\forall y\in[0,1]$ 有 $g_a^l(y)=b$.

$c=d$ 时, $f_a^r(x)=f_a^r(c)=1$, 则对 $\forall y\in[0,1]$ 有 $g_a^r(y)=c$.

由于 g_a^l 和 g_a^r 在 $[0,1]$ 上连续且单调,因而它们在 $[0,1]$ 上均可积,其积分值为实数,故可采用此积分值对模糊数进行排序。

定义 2 设 $\tilde{a}$ 是用左、右隶属函数 f_a^l 和 f_a^r 确定的一个模糊数, g_a^l 和 g_a^r 分别是 f_a^l 和 f_a^r 的反函数

称 $E_l(\tilde{a})=\int_0^1 g_a^l(y)dy$ 和

$E_r(\tilde{a})=\int_0^1 g_a^r(y)dy$ 分别为模糊数 $\tilde{a}$ 的左、右期望值.

称 $E_\alpha(\tilde{a})=\alpha E_r(\tilde{a})+(1-\alpha)E_l(\tilde{a})$为模糊数 $\tilde{a}$ 的α－总体期望值

其定义中的参数 $\alpha\in[0,1]$用来表示决策者的决策态度，称之为乐观度，α 越大，乐观度越大。

$\alpha=0$ 时　$E_0(\tilde{a})=E_l(\tilde{a})$　表示最悲观决策者的态度

$\alpha=1$ 时　$E_1(\tilde{a})=E_r(\tilde{a})$　表示最乐观决策者的态度

$\alpha=\frac{1}{2}$时　$E_{\frac{1}{2}}(\tilde{a})=\frac{1}{2}[E_l(\tilde{a})+E_r(\tilde{a})]$　表示中庸决策者的态度。

定义 3　设 $S=\{\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n\}$是一个凸模糊数的集合

(1). 称 $\tilde{a}_j$ 优于$\tilde{a}_i$，记作 $\tilde{a}_j>\tilde{a}_i$，

$\tilde{a}_j>\tilde{a}_i$　当且仅当 $E_\alpha(\tilde{a}_j)>E_\alpha(\tilde{a}_i)$　，　$\forall\alpha\in[0,1]$

(2). 称 $\tilde{a}_i$ 等同于$\tilde{a}_j$，记作 $\tilde{a}_i=\tilde{a}_j$；$\tilde{a}_i=\tilde{a}_j$

当且仅当 $E_\alpha(\tilde{a}_i)=E_\alpha(\tilde{a}_j)$　，　$\forall\alpha\in[0,1]$

根据定义 2 和定义 3 便可对模糊数进行有效排序。

对于三角模糊数而言，排序更为方便，这是因为对于三角模糊数 $\tilde{a}=(a_l,a,a_r)$

$$f_a^l(x)=\frac{x-a}{a-a_l},f_a^r(x)=\frac{x-a_r}{a-a_r}$$

其反函数分别为

$g_a^l(y)=a_l+(a-a_l)y$　和　$g_a^r(y)=a_r+(a-a_r)y$　，　$y\in[0,1]$.

$$E_l(\tilde{a})=\int_0^1 g_a^l(y)dy=\frac{1}{2}(a+a_l);$$

$$E_r(\tilde{a})=\int_0^1 g_a^r(y)dy=\frac{1}{2}(a+a_r);$$

$$E_\alpha(\tilde{a}) = \frac{1}{2}[\alpha a_r + a + (1-\alpha)a_l].$$

2、模型的解法：

设 X 为由(2·2)所确定的可行解集，$g: X \to F^*(R)$ 为从可行解集合 X 到模糊数集 $F^*(R)$ 的映射

规定 $g(x) = \sum_{i\in s} FI_i$，$S = \{i \in N; x_i = 1\}$

定义 4 给定乐观度 $\alpha \in [0,1]$，$x^* \in X$ 称为模糊整数规划(2·1)～(2·2)的最优解，如果

$E_\alpha(g(x^*)) \geqslant E_\alpha(g(x))$

不妨假设模型(2·1)～(2·2)中所涉及的模糊数均为三角模糊数(这是因为在描述决策者的主观判断和定性分析时，常常用三角模糊数表示描述结果，它方便可行，又省时)。

若评价得到模糊贡献指标

$FI_i = (C_i^{(l)}, C_i, C_i^{(r)})$

则 $g(x) = (\sum_{i\in s} C_i^{(l)}, \sum_{i\in s} C_i, \sum_{i\in s} C_i^{(r)})$

则根据定义及三角模糊数的运算可将模糊整数规划问题(2·1)～(2·2)转化为下列问题：

$$\max \sum_{i=1}^{n} [c_i + \alpha c_r + (1-\alpha)c_l] x_i \qquad (2\cdot3)$$

$$s\cdot t\begin{cases} \sum e_i x_i \leqslant b_0 & \\ \sum_{i\in P_{ls}} x_i = b_{l_j} & (j = 1,2,\cdots,q_t, l = 1,2,\cdots,T) \\ x_i \in \{0,1\} & (i = 1,2,\cdots,n) \end{cases} \qquad (2\cdot4)$$

(2·3)～(2·4)是经典整数规划问题，经典整数规划问题可采用优化软件包 *LINDO* 或 *MATLAB* 中的优化工具箱软件直接求解。

例 2：模糊数在 *AHP* 方法中的应用

层次分析法（*AHP*）是美国著名运筹学家 *T. L. Saaty* 于 1977 年提出的，它是一种分析社会、经济、政治等领域中复杂问题时简捷、实用的多准则决策方法，它把复杂问题表示为有序的递阶层次结构，其方法的关键在于以一定的标度把人的主观感觉数量化，出现最早且使用最广泛的标度是 1－9 标度法，利用此构造两两比较判断矩阵，通过人们的两两比较、判断和计算，对决策方案的优劣进行排序，考虑到人们对复杂问题（事物）判断的模糊性，提出了程度分析和综合决策理论，形成了模糊 *AHP* 方法，用模糊 *AHP*（以下简记为 *FAHP*），克服了在 *AHP* 方法中人的主观判断、选择、偏好对结果的影响，使决策更趋于合理，无论 *AHP* 方法还是 *F－AHP* 方法，从两两比较判断矩阵中求出权向量是两种决策方法的核心问题.

1 *F－AHP* 方法的主要步骤及理论

1.1 *F－AHP* 法的主要步骤

F－AHP 方法首先是建立递阶层次结构模型，要把实际问题分解为若干因素，然后按属性的不同将这些因素分成若干组。划分递阶层结构，一般可分为最高层、中间层和最低层，最高为实现决策目标所采取的措施、政策、准则等，一般根据问题规模大小和复杂程度，分为准则层、子准则层，最低层次也称为方案层，包括为

实现目标可供选择的方案;其次是两两比较判断,求得模糊判断矩阵,再次,根据模糊判断矩阵求出权向量,最后达到决策目的.

1.2　模糊综合程度值的计算

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一对象集,$U=\{u_1,u_2\cdots,u_m\}$ 是一目标集,则第 i 个对象满足 m 个目标要求的程度值分别为 M_{Ei}^{1},$M_{Ei}^{2},\cdots,M_{Ei}^{m}(i=1,2\cdots,n)$,它们均为三角模糊数,则第 i 个对象满足 m 个目标的综合程度值为:

$$S_i = \sum_{j=1}^{m} M_{Ei}^{j} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{Ei}^{j}\right]^{1}$$

1.3　两两比较标度的表示

利用 AHP 法,对两两元素的重要性程度比较进行标度得到模糊判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$,

其中:

$a_{ij}=(l_{ij},m_{ij},u_{ij};1)$,它满足

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{ji}}, m_{ji} = \frac{1}{m_{ij}}, u_{ij} = \frac{1}{u_{ji}}$$

1.4　权重向量的计算

文[8]介绍了如下算法。

第一步:首先计算两模糊数 $M_1 \geqslant M_2$ 的可能性程度

$V(M_1 \geqslant M_2)=\mathrm{SUP}\min\limits_{x\geqslant y}[f_{M1}(x),f_{M2}(y)]$

当存在数对(x,y),使 $x \geqslant y$,且 $f_{M_1}(x)=f_{M_2}(y)$时

$\vee(M_2 \geqslant M_1)=1$

并考虑$\vee(M_2 \geqslant M_1)=1$(当且仅当)

$$\vee(M_2 \geqslant M_1)=hgt(M_1 \cap M_2)=\frac{l_1-u_2}{(m_2-u_2)-(m_1-l_1)}$$

第二步:考虑 M 和 K 个三角模糊数的比较

$\vee(M \geqslant M_1,M_2,\cdots,M_k)=\vee[(M \geqslant M_1)$和$(M \geqslant M_2)$和…$(M \geqslant M_k)]$

$=\min \vee(M \geqslant M_i),i=1,2,\cdots,k$

第三步:设 $d'(Ai)=min \vee[S_i \geqslant S_k],k=1,2,\cdots,n \quad k \neq i$

这里 S_i 表示在给定准则下,同一层次每个元素同所有元素相比较的综合重要程度值,Ai 表示第 i 个元素,则:

权向量为 $W'=(d'(A_1),d'(A_2),\cdots,d'(A_n))^T$

归一化后得:$F-AHP$ 的权重向量为

$W=(d(A_1),d(A_2),\cdots,d(A_n))^T$

2 $F-AHP$ 中权向量的一种新快速算法

权重向量的计算问题是 AHP 方法的核心问题,下面给出一种运算量小,易于操作的新快速计算方法及其理论.

这里仍然要涉及到模糊数的排序问题,我们仍采用例 1 的方法进行.

假设求出对象集 $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$满足目标集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$要求的模糊程度值为 $M_{Ei}^1,M_{Ei}^2,M_{Ei}^m(i=1,2,\cdots,n,$ M_{Ei}^j均为三角模糊数),对象集满足目标集的综合程度值分别为

$S_1, S_2, \cdots, S_n$,其中:

$S_i = \sum_{j=1}^{m} M_{Ei}^j \cdot [\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{Ei}^j]^{-1}$ 为第 i 个对象满足 m 个目标的综合程度值,那么,$F-AHP$ 中的权向量算法如下:

第一步:给定 α(决策者的优化度),计算

$\omega_i^1 = I_T^\alpha(S_i) \quad i=1,2,\cdots,n$;

$I_T^\alpha(S_i)$为三角模糊数 S_i 的总积分值.

第二步:得权重向量 $W' = (w'_1, w'_2, \cdots, w'_n)^T$

归一化后权重向量 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$, $(\sum_{i=1}^{n} w_i = 1)$

3 实例说明

三峡工程的启动引起了移民建房、筑建公路等工程的兴起,需要大量的建筑材料,文[8]在宜昌地区调查研究,根据原国内贸易部、宜昌市物资局和葛州坝工程局领导和专家的意见,综合在两个地方建立建材配送方案,其一是将建材配送中心设在葛州坝工程局的夜明珠仓库;其二是将材料配送中心设在宜昌市物资局所属的储运仓库,要求两个方案中选出一个最优方案。

文[8]根据 $F-AHP$ 方法要求,建立了"宜昌地区建材连锁经营及配送系统模式优化数学模型"(见文[8]),根据专家咨询表提供的信息进行定量计算,得到主指标加权平均值如下表:

Weighted means of main indes

	C_1 经济性	C_2 效益性	C_3 中心选址	C_4 引导性	C_5 内部指标	C_6 满足性	C_7 重要性
C_1 经济性	(1,1,1)	(1/4,1/3,1/2)	(1/5,1/3,1)	(1,3,5)	(1,5,9)	(1/4,1/3,1/2)	(1/9,1/5,1/2)
C_2 效益性	(2,3,4)	(1,1,1)	(3,5,7)	(1/8,1/5,1/2)	(3,5,7)	(1,1,1)	(1,1,1)
C_3 中心选址	(1,3,5)	(1/7,1/5,1/3)	(1,1,1)	(1/5,1/3,1)	(1,3,5)	(1/9,1/5,1/2)	(1/5,1/3,1/2)
C_4 引导性	(1/5,1/3,1)	(2,5,8)	(1,3,5)	(1,1,1)	(1,3,5)	(1/6,1/5,1/4)	(1/7,1/5,1/3)
C_5 内部指标	(1/9,1/5,1)	(1/7,1/5,1/3)	(1/5,1/3,1)	(1/5,1/3,1)	(1,1,1)	(1/5,1/3,1)	(1,2,3)
C_6 满足性	(2,3,5)	(1,1,1)	(1,5,9)	(4,5,6)	(1,3,5)	(1,1,1)	(7,8,9)
C_7 重要性	(2,5,9)	(1,1,1)	(2,3,5)	(2,5,7)	(1/3,1/2,1)	(1/9,1/8,1/7)	(1,1,1)

根据前面公式计算得：

$S_1=(0.027,0.109,0.328)$，$S_2=(0.079,0.174,0.402)$

$S_3=(0.026,0.086,0.259)$，$S_4=(0.039,0.137,0.386)$

$S_5=(0.020,0.047,0.156)$，$S_6=(0.121,0.279,0.565)$

$S_7=(0.067,0.164,0.453)$

由前面提供的权重向量的计算方法，取 $\alpha=1$（即取决策者的优化度为 1）很快算出权向量：

$W'=(0.219,0.289,0.173,0.262,0.102,0.422,0.309)^T$，

归一化后得

$W=(0.123,0.163,0.098,0.148,0.057,0.238,0.173)^T$

此结果与文[8]中所得 $C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7$ 的排序向量结果完全一致。文[8]中算出 $W=(0.13,0.17,0.10,0.15,0.03,0.24,0.18)^T$

说明：

$F-AHP$ 方法的权重向量计算问题是十分重要的问题，目前

流行的算法有好多种，但都过于复杂，计算量相当大，不易操作，再者，在决策过程中，由于决策者对实际问题的认识程度(优化度)不同，这势必会对决策结果产生影响，这里所给的方法不仅从理论上解决了以上 问题，更为重要的是其计算量非常小，且算法十分简单(仅为数字加法与乘法)，是一种更为科学、更为合理的简易算法.

第三章　模糊复集与模糊复数.复模糊集与复模糊数

§ 3.1 模糊复集合与模糊复数

3.1.1 闭复区间数及其运算

定义 3.1.1　设 C 为复数域,对任意闭区间数 $X=[X^-,X^+]$, $Y=[Y^-,Y^+]\in I(R)$,称复有界闭集

$Z=X+iY=\{x+iy\in C\mid x\in X,y\in Y\}$ 为闭复区间数,其中 $i=\sqrt{-1}$.

显然,闭复区间数 Z 定义了复平面 C 上的一个矩形。因此,复有界闭集 $Z=X+iY$ 也称为矩形闭复区间数。用 $I(C)$ 表示 C 上闭复区间数的全体,即:

$I(C)=\{Z=X+iY\mid X,Y\in I(R)\}$

定义 3.1.2　设 $Z_k=X_k+iY_k,k=1,2$ 为闭复区间数,则

$$Z_1\subseteq Z_2\quad 当且仅当\ X_1\subseteq X_2,Y_1\subseteq Y_2$$

定义 3.1.3　设 $*$ 是复数域 C 上的二元运算,对于 $\forall Z_k=X_k+iY_k=[X_k^-,X_k^+]+i[Y_k^-,Y_k^+]\in I(C),k=1,2,I(C)$上扩展运算定义为

$Z_1*Z_2\triangleq\{z\mid\exists(z_1,z_2)\in Z_1\times Z_2,z=z_1*z_2\}$

定义 3.1.4 设 $Z = X + iY \in I(C)$，则

(1)称 $Z^* = X - iY = \{x - iy \mid x \in X, y \in Y\}$

为 Z 的共轭闭复区间数。

(2)称 $|Z| = (X^2 + Y^2)^{1/2} = \{(x^2 + y^2)^{1/2} \mid x \in X, y \in Y\}$ 为 Z 的模。

定义 3.1.5 称 n 个有序闭复区间数组

$Z = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$，$Z_k \in I(C)$，$k = 1,2,\cdots,n$ 为闭复区间向量.用 $I(C^n)$ 表示 C^n 上的闭复区间向量的全体，即

$I(C^n) = \{Z - (Z_1, Z_2, \cdots, Z_n) \mid Z_k \in I(C), k = 1,2,\cdots,n\}$

闭复区间向量的包含关系是通过分量来定义的，即设

$Z^{(1)} = (Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)}, \cdots, Z_n^{(1)})$，$Z^{(2)} = (Z_1^{(2)}, Z_2^{(2)}, \cdots, Z_n^{(2)}) \in I(C^n)$，若 $Z^{(1)} \subseteq Z^{(2)}$ 当且仅当 $Z_k^{(1)} \subseteq Z_k^{(2)}$，$k = 1,2,\cdots,n$.

如果点向量 $\omega \in Z$，它等价于 $\omega_k \in Z_k$，$k = 1,2,\cdots,n$

定义 3.1.6 如果 n^2 个元素均为闭复区间数 $Z_{ij} \in I(C)$，$i, j = 1,2,\cdots,n$

则由此 n^2 个元素构成的 $n \times n$ 阶矩阵

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix}$$

称为闭复区间矩阵

3.1.2 闭凸复数集与闭凸模糊复集合

定义 3.1.7 设 C 为复数域，映射 $\underset{\sim}{Z}: C \to [0,1]$ 称为模糊复

集合.

$\underset{\sim}{Z}(z)$称 z 相对于模糊复集合$\underset{\sim}{Z}$的隶属程度。$\underset{\sim}{Z}(\cdot)$称为模糊复集合 $\underset{\sim}{Z}$ 的隶属函数.

用 $F(C)$表示 C 上的模糊复集合之全体,即

$F(C)=\{\underset{\sim}{Z}\mid\underset{\sim}{Z}:C\to[0,1]\}$

定义 3.1.8 设 $\underset{\sim}{Z}\in F(C),\forall\alpha\in(0,1]$,称

$(\underset{\sim}{Z})_\alpha\triangleq Z_\alpha\triangleq\{z=x+iy\in C\mid\underset{\sim}{Z}(z)=\underset{\sim}{Z}(x+iy)\geqslant\alpha\}$为模糊复集 $\underset{\sim}{Z}$ 的α 水平复集合。称

$(\underset{\sim}{Z})_{\dot{\alpha}}\triangleq Z_{\dot{\alpha}}\triangleq\{z=x+iy\in C\mid\underset{\sim}{Z}(z)=\underset{\sim}{Z}(x+iy)>\alpha\}$为模糊复集 $\underset{\sim}{Z}$ 的强α 水平复集合。称

$Z_{\dot{0}}=supp\,\underset{\sim}{Z}=\{z=x+iy\mid\underset{\sim}{Z}(z)=\underset{\sim}{Z}(x+iy)>0\}$为模糊复集合 $\underset{\sim}{Z}$ 的支集.

定义 3.1.9 设 R 是实数域,C 为复数域,X 与 Y 是R 上的凸集,$Z\subseteq C$,并且

$Z=\{x+iy\in C\mid x\in X,y\in Y\}$ (△)

则称 Z 为C 上的凸集.

设 $Z\subseteq C$,称 Z 为C 上的闭集,当且仅当

$$\left.\begin{array}{l}z_n=x_n+iy_n\in Z,n=1,2,\cdots\\ \lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+iy_n)=z=x+iy\end{array}\right\}\Rightarrow z=x+iy\in C$$

(△△)

C 上满足上式(△)、(△△)式的复集合 Z 称为闭凸复数集

定理 3.1.1 设 C 为复数域,$Z\subseteq C$,且 Z 有界,则 Z 是闭凸复数集的充要条件是:Z 是闭复区间数

定义 3.1.10 $\underset{\sim}{Z}\in F(C)$称为 C 上的凸模糊复集

当且仅当 $\forall\alpha\in(0,1]$, Z_α 是 C 上的凸复数集；

$\underset{\sim}{Z}$ 称为 C 上的闭模糊复集，当且仅当

$\forall\alpha\in(0,1]$, Z_α 是 C 上的闭复集；

如果 $\underset{\sim}{Z}\in F(C)$, $supp\,\underset{\sim}{Z}$ 有界或 $\forall\alpha\in(0,1]$, Z_α 有界，则称 $\underset{\sim}{Z}$ 为闭凸模糊复集当且仅当

$\forall\alpha\in(0,1]$, Z_α 是闭复区间数(约定空集 $\varnothing$ 为 C 上的闭复区间数).

3.1.2 **模糊复数**(*Fuzzy complex numbers*)

(一)模糊复数的一般概念

我们沿顺模糊数的一般概念，下面先给出模糊复数的一般概念

定义 3.1.11 设 $\underset{\sim}{Z}\in F(C)$, $\underset{\sim}{Z}$ 称为正规模糊复集当且仅当

$\{z\in C\mid \underset{\sim}{Z}(z)=1\}\neq\varnothing$

定义 3.1.12 设 $\underset{\sim}{Z}\in F(C)$，如果 $supp\,\underset{\sim}{Z}$ 为有界复数集，则称 $\underset{\sim}{Z}$ 为有限模糊复集；如果对 $\forall\alpha\in(0,1]$

Z_α 为有界复数集，则称 $\underset{\sim}{Z}$ 为有界模糊复集。有限模糊复集和有界模糊复集统称为有界模糊复集。

定义 3.1.13 复数域 C 上的正规凸模糊复集称为模糊复数；正规闭凸模糊复集称闭模糊复数；正规有界闭凸模糊复集称为有界闭模糊复数。

由于有界闭模糊复数的 α 水平复集是闭复区间数，因而其运算较为方便。下面先介绍一下有界闭模糊复数的简单性质及基本运算。

用 $F_0(C)$表示 C 上有界闭模糊复数之全体,即

$F_0(C)=\{\underset{\sim}{Z} \mid \underset{\sim}{Z}$ 为 C 上的有界闭模糊复数$\}$

定理 3.1.2 设 $f: C^n \rightarrow C,(z_1,z_2,\cdots,z_n)\rightarrow f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=w$ 为连续复函数。如果序列$\{Z_1^{(m)}=X_1^{(m)}+iY_1^{(m)}\}$, $\{Z_2^{(m)}=X_2^{(m)}+iY_2^{(m)}\},\cdots$, $\{Z_n^{(m)}=X_n^{(m)}+iY_n^{(m)}\}, m=1,2,\cdots$, 满足

对 $\forall m, Z_k^{(m)}=X_k^{(m)}+iY_k^{(m)}, k=1,2,\cdots,n$ 是 C 上的有界闭复数集,且

$Z_k^{(m)}=X_k^{(m)}+iY_k^{(m)} \supseteq Z_k^{(m+1)}=X_k^{(m+1)}+iY_k^{(m+1)}$,则 f 具有上连续性,即

$$\lim_{m\to\infty} f(Z_1^{(m)},Z_2^{(m)},\cdots,Z_n^{(m)})=f(\lim_{m\to\infty} Z_1^{(m)},\cdots,\lim_{m\to\infty} Z_n^{(m)})$$

$$=f(\lim_{m\to\infty} X_1^{(m)}+i\lim_{m\to\infty} Y_1^{(m)},\cdots,\lim_{m\to\infty} X_n^{(m)})+i\lim_{m\to\infty} Y_n^{(m)})$$

定理 3.1.3 设 $w=f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$为 n 元连续复函数,$\underset{\sim}{Z}_k \in F_0(C)$, $k-1,2,\cdots,n$ 为有界闭模糊复数,则

$$f(\underset{\sim}{Z}_1,\underset{\sim}{Z}_2,\cdots,\underset{\sim}{Z}_n)_\alpha=f(Z_{1,\alpha},\cdots,Z_{n,\alpha}),\alpha\in(0,1]$$

定理 3.1.4 设 $\underset{\sim}{Z}_1,\underset{\sim}{Z}_2\in F_0(C)$为任意有界闭模糊复数,则对 $\forall \alpha\in(0,1]$,有

$$(\underset{\sim}{Z}_1 \pm \underset{\sim}{Z}_2)_\alpha=Z_{1,\alpha}\pm Z_{2,\alpha}$$

$$(\underset{\sim}{Z}_1 \cdot \underset{\sim}{Z}_2)_\alpha=Z_{1,\alpha}\cdot Z_{2,\alpha}$$

$$(\underset{\sim}{Z}_1 / \underset{\sim}{Z}_2)_\alpha=Z_{1,\alpha}/ Z_{2,\alpha}$$

$$(k\,\underset{\sim}{Z}_1)_\alpha=k\,\underset{\sim}{Z}_{1,\alpha}, k\in R$$

以上内容详见文献[10]有关章节.

(二)模糊复数的分析定义及运算性质

下面给出模糊复数更深刻定义。

1.模糊复数的分析定义及其运算

设 $z=x+iy, w=x+iy$ 为两普通复数，C 为普通复数集.

模糊复数 $\underset{\sim}{Z}$ 是用 C 到区间[0,1]上的映射来定义，其隶属函数记为 $\mu(z|\underset{\sim}{Z})$.

$\underset{\sim}{Z}$ 的 α 截集记为 $\underset{\sim}{Z}^{\alpha}$ 即

$\underset{\sim}{Z}^{\alpha}=\{z|\mu(z|\underset{\sim}{Z})>\alpha\}, 0\leqslant\alpha<1,$

特别 $\underset{\sim}{Z}^{1}=\{z|\mu(z|\underset{\sim}{Z})=1\}$ 为 $\underset{\sim}{Z}$ 的核.

$\underset{\sim}{Z}$ 的支集记为 $supp(\underset{\sim}{Z})$，即

$\underset{\sim}{Z}^{0}=supp(\underset{\sim}{Z})=\{z|\mu(z|\underset{\sim}{Z})>0\}.$

定义 3.1.14 $\underset{\sim}{Z}$ 为模糊复数当且仅当

(1) $\mu(z|\underset{\sim}{Z})$ 是连续的.

(2) $\underset{\sim}{Z}^{\alpha}(0\leqslant\alpha<1)$ 是开的、有界的，连通且单连通.

(3) $\underset{\sim}{Z}^{1}$ 是非空紧集，孤连通且单连通.

以下简称 $\underset{\sim}{Z}$ 为 F 复数，用 $\underset{\sim}{C}$ 记 F 复数集.

关于 F 复数的表示，文[35]中提出如下表示法.

设 $\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}$ 分别是用隶属函数 $\mu(x|\underset{\sim}{X})$ 和 $\mu(y|\underset{\sim}{Y})$ 定义的模糊实数，其中 $z=x+iy$ 为普通复数，则 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\underset{\sim}{Y}$ 是一模糊复数，其隶属函数为

$$\mu(z|\underset{\sim}{Z})=\min(\mu(x|\underset{\sim}{X}), \mu(y|\underset{\sim}{Y})),$$

并称此类 F 复数为直角(或矩形) F 复数

关于 F 复数的指数形式有如下表示：

设 $\underset{\sim}{R} \geqslant 0$ 是模糊实数(即非负模糊数),$\underset{\sim}{\theta}$ 为另一模糊实数,且 $supp(\underset{\sim}{\theta})$的直径小于 2π,则 $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{R}exp(i\,\underset{\sim}{\theta})$是一 F 复数,其隶属函数为

$$\mu(z \mid \underset{\sim}{Z}) = \min(\mu(r \mid \underset{\sim}{R}), \mu(\theta \mid \underset{\sim}{\theta})),$$

其中 $z = re^{i\theta}$为普通复数.

基于定义 3.1.14,下面根据扩张原理给出模糊复数的运算:

设 $f(z_1, z_2) = w$ 是$C \times C$ 到C 上任一映射,由扩张原理将其推广到:$\underset{\sim}{C} \times \underset{\sim}{C}$ 到$\underset{\sim}{C}$ 的映射

$$f(\underset{\sim}{Z_1}, \underset{\sim}{Z_2}) = \underset{\sim}{W}.$$

$\underset{\sim}{Z_1}, \underset{\sim}{Z_2}, \underset{\sim}{W}$ 均为F 复数,其隶属函数为

$\mu(w \mid \underset{\sim}{W}) = sup\{\pi(z_1, z_2) \mid f(z_1, z_2) = w\}$,

$\pi(z_1, z_2) = min\{\mu(z_1 \mid \underset{\sim}{Z_1}), \mu(z_2 \mid \underset{\sim}{Z_2})\}$.

因此,F 复数的四则运算用如下方式定义:

依　　$f(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ 来定义 $\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{Z_1} + \underset{\sim}{Z_2}$,

　　$f(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$ 来定义 $\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{Z_1} \cdot \underset{\sim}{Z_2}$,

$-\underset{\sim}{Z}$ 由$\mu(z \mid -\underset{\sim}{Z}) = \mu(-z \mid \underset{\sim}{Z})$来定义,从而

$\underset{\sim}{Z_1} - \underset{\sim}{Z_2} = \underset{\sim}{Z_1} + (-\underset{\sim}{Z_2})$.

$\underset{\sim}{Z}^{-1}$由 $\mu(z \mid \underset{\sim}{Z}^{-1}) = \mu(z^{-1} \mid \underset{\sim}{Z})$来定义,从而

$\underset{\sim}{Z_1} / \underset{\sim}{Z_2} = \underset{\sim}{Z_1} \cdot \underset{\sim}{Z_2}^{-1}$(除法要求 $0 \overline{\in} supp(\underset{\sim}{Z_2})$).

根据上面运算,模糊复数运算具有下列几个性质:

为了方便起见,记以上定义的 F 复数的四则运算为 $\{+,-,\cdot,\div\}$,

定理 3.1.5　设 $\underset{\sim}{Z}_1$、$\underset{\sim}{Z}_2$ 为两 F 复数,$* \in \{+,-,\cdot,\div\}$,则 $\forall \alpha \in (0,1]$,有

$$(\underset{\sim}{Z}_1 * \underset{\sim}{Z}_2)^\alpha = \underset{\sim}{Z}_1^\alpha * \underset{\sim}{Z}_2^\alpha.$$

根据文献[35]中定理1,引理1,定理2及分解定理知此定理显然成立,证略.

定理 3.1.6　(F 复数关于四则运算的封闭性)

设 $\underset{\sim}{Z}_1,\underset{\sim}{Z}_2$ 为两 F 复数,$* \in \{+,-,\cdot,\div\}$,则 $\underset{\sim}{Z}_1 * \underset{\sim}{Z}_2$ 仍为 F 复数(当 $*$ 取除法运算时,$0 \overline{\in} supp(\underset{\sim}{Z}_2)$).

根据定理3.1.5及分解定理可直接证明此定理,证略.

定理 3.1.7　(运算律)　设 $\underset{\sim}{Z}_1,\underset{\sim}{Z}_2,\underset{\sim}{Z}_3$ 为三个 F 复数,则

(1)(加法交换律)　$\underset{\sim}{Z}_1 + \underset{\sim}{Z}_2 = \underset{\sim}{Z}_2 + \underset{\sim}{Z}_1$,

(乘法交换律)　$\underset{\sim}{Z}_1 \cdot \underset{\sim}{Z}_2 = \underset{\sim}{Z}_2 \cdot \underset{\sim}{Z}_1$

(2)(加法结合律)　$(\underset{\sim}{Z}_1 + \underset{\sim}{Z}_2) + \underset{\sim}{Z}_3 = \underset{\sim}{Z}_1 + (\underset{\sim}{Z}_2 + \underset{\sim}{Z}_3)$,

(乘法结合律)　$(\underset{\sim}{Z}_1 \cdot \underset{\sim}{Z}_2) \cdot \underset{\sim}{Z}_3 = \underset{\sim}{Z}_1 \cdot (\underset{\sim}{Z}_2 \cdot \underset{\sim}{Z}_3)$

一般而言,$\underset{\sim}{Z}_1 \cdot (\underset{\sim}{Z}_2 + \underset{\sim}{Z}_3) \neq \underset{\sim}{Z}_1 \cdot \underset{\sim}{Z}_2 + \underset{\sim}{Z}_1 \cdot \underset{\sim}{Z}_3$.　　(△△△)

证明:　由定理3.1.5即得

$(\underset{\sim}{Z}_1 + \underset{\sim}{Z}_2)^\alpha = \underset{\sim}{Z}_1^\alpha + \underset{\sim}{Z}_2^\alpha = \underset{\sim}{Z}_2^\alpha + \underset{\sim}{Z}_1^\alpha = (\underset{\sim}{Z}_2 + \underset{\sim}{Z}_1)^\alpha$.

再根据分解定理得(1)的第一式成立,其它式证法类似,这里

从略。　　证毕。

关于(△△△)式，由前面 F 复数概念知，F 复数可用 F 实数表示，而对于一般的 F 实数有类似于(△△△)式(详见文献[43]. $P129-131$)，故对于一般的 F 复数有(△△△)式.

定理 3.1.8　设 $\underset{\sim}{Z}_1, \underset{\sim}{Z}_2$ 为两 F 复数，$* \in \{+,-,\cdot,\div\}$，

$\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{Z}_1 * \underset{\sim}{Z}_2, w_n \in \underset{\sim}{W}^0, w_n \to w(n \to \infty)$.

$\mu(w_n | \underset{\sim}{W}) \to \lambda \in [0,1], (n \to \infty)$,

则　$\mu(w\ \underset{\sim}{W}) \geqslant \lambda$(当 $*$ 取除法运算时，$0 \overline{\in} supp(\underset{\sim}{Z}_2)$).

证明　$\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{Z}_1 * \underset{\sim}{Z}_2$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ z_{1n} \in \underset{\sim}{Z}_1^0, z_{2n} \in \underset{\sim}{Z}_2^0$，且 $z_{1n} * z_{2n} = w_n$(这里 $*$ 表示普通复数的四则运算).

由隶属函数 μ 的定义及上确界定义有

$\mu(w_n | \underset{\sim}{W}) \geqslant \pi(z_{1n}, z_{2n}) > \mu(w_n | \underset{\sim}{W}) - \varepsilon$.

由于对所有 z_{1n}, z_{2n} 及 w_n 属于紧集，因此可选择其子列 $z_{1n_k}, z_{2n_k}, w_{n_k}$，使 $z_{1n_k} \to z_1, z_{2n_k} \to z_2$,

$w_{n_k} \to w(k \to \infty)$

其中　　$z_1 * z_2 = w$.

由于 $\mu(w_n | \underset{\sim}{W}) \to \lambda(n \to \infty)$，及 π 的连续性，故有

$\lambda \geqslant \pi(z_1, z_2) > \lambda - \varepsilon$.

由 ε 的任意性可知，　　$\pi(z_1, z_2) = \lambda$.

从而　　$\mu(w | \underset{\sim}{W}) = sup\{\pi(z_1, z_2) | z_1 * z_2 = w\}$

$\geqslant \pi(z_1, z_2) = \lambda$.　　证毕

2. 模糊复数的表现形式及相关运算性质

下面就模糊复数的表示形式分类讨论其概念及运算

(1)矩形模糊复数及性质

定义 3.1.15　设 $\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{Y}$是两 $Fuzzy$ 实数,其隶属函数分别为 $\mu(x \mid \underset{\sim}{X})$, $\mu(y \mid \underset{\sim}{Y})$,其中 $x, y \in R$, $z = x + iy \in C$　(μ 详见文[35]),则 $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{X} + i\underset{\sim}{Y}$是一 $Fuzzy$ 复数($i^2 = -1$),其隶属函数为:

$$\mu(z \mid \underset{\sim}{Z}) = min(\mu(x \mid \underset{\sim}{X}), \mu(y \mid \underset{\sim}{Y}))$$

称 $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{X} + i\underset{\sim}{Y}$为矩形 $Fuzzy$ 复数。

矩形 $Fuzzy$ 复数的几个性质。

定理 3.1.9　对于 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,有 $\underset{\sim}{Z}^{\alpha} = \underset{\sim}{X}^{\alpha} \times \underset{\sim}{Y}^{\alpha}$

证明:①设 $0 \leqslant \alpha < 1$,

若 $z \in \underset{\sim}{Z}^{\alpha}$,则 $min(\mu(x \mid \underset{\sim}{X}), \mu(y \mid \underset{\sim}{Y})) > \alpha$

所以,$\mu(x \mid X) > \alpha$, $\mu(y \mid \underset{\sim}{Y}) > \alpha$

从而$(x, y) \in \underset{\sim}{X}^{\alpha} \times \underset{\sim}{Y}^{\alpha}$,则 $min(\mu(x \mid \underset{\sim}{X}), \mu(y \mid \underset{\sim}{Y})) > \alpha$

故　$\mu(z \mid \underset{\sim}{Z}) > \alpha$,即 $z \in \underset{\sim}{Z}^{\alpha}$　$(z = x + iy)$

②当 $\alpha = 1$ 时

若$(x, y) \in \underset{\sim}{X}^1 \times \underset{\sim}{Y}^1$,则对于 $z = x + iy$ 有 $\mu(z \mid \underset{\sim}{Z}) = 1$,所以 $z \in \underset{\sim}{Z}^1$

反之,若 $z \in \underset{\sim}{Z}^1$,则　$\exists x, y \in R$,使得 $z = x + iy$,且有

$$\mu(x \mid \underset{\sim}{X}) = \mu(y \mid \underset{\sim}{Y}) = 1$$

所以$(x, y) \in \underset{\sim}{X}^1 \times \underset{\sim}{Y}^1$.　　证毕.

这表明 $\underset{\sim}{Z}$的 α 截集是矩形的,正是 $\underset{\sim}{Z}$被称为矩形 *Fuzzy* 复数的原因。

定理 3.1.10 ①$\underset{\sim}{Z}$的共轭 $\underset{\sim}{Z}^*$认为仍是一 *Fuzzy* 复数。其隶属函数定义为:$\mu(z|\underset{\sim}{Z}^*)=\mu(\overline{z}|\underset{\sim}{Z})$,其中 $\overline{z}=x-iy$ 是 $z=x+iy$ 的共轭复数,则

$$\underset{\sim}{Z}^*=\underset{\sim}{X}+i(-\underset{\sim}{Y});\qquad i^2=-1$$

②若$\underset{\sim}{Z}_j=\underset{\sim}{X}_j+i\,\underset{\sim}{Y}_j$, $j=1,2$,则有

$$\underset{\sim}{Z}_1\pm\underset{\sim}{Z}_2=(\underset{\sim}{X}_1\pm\underset{\sim}{X}_2)+i(\underset{\sim}{Y}_1\pm\underset{\sim}{Y}_2);$$

③$(\underset{\sim}{Z}_1\pm\underset{\sim}{Z}_2)^\alpha=(\underset{\sim}{X}_1{}^\alpha\pm\underset{\sim}{X}_2{}^\alpha)+i(\underset{\sim}{Y}_1{}^\alpha\pm\underset{\sim}{Y}_2{}^\alpha)$, $0\leqslant\alpha<1$

④$\underset{\sim}{Z}$的模定义为:$\mu(r||\underset{\sim}{Z}|)=sup\{\mu(z|\underset{\sim}{Z})||z|=r\}$,其中 r 是 z 的模,则

$$|\underset{\sim}{Z}|^\alpha=[(\underset{\sim}{X}^\alpha)^2+(\underset{\sim}{Y}^\alpha)^2]^{\frac{1}{2}},0\leqslant\alpha\leqslant1$$

证明:①$\underset{\sim}{Z}^*=\underset{\sim}{X}+i(-\underset{\sim}{Y})$是显然的。

②我们仅讨论和的情况。

设 $\underset{\sim}{W}=\underset{\sim}{Z}_1+\underset{\sim}{Z}_2$,则有

$\mu(\omega|\underset{\sim}{W})=sup\{\pi(z_1,z_2)|z_1+z_2=\omega\}$

其中 $\pi(z_1,z_2)=min\{\mu(z_1|\underset{\sim}{Z}_1),\mu(z_2|\underset{\sim}{Z}_2)\}$, $z_1,z_2\in C$

定义 $\Gamma(x_1,x_2,y_1,y_2)=\min\{\mu(x_i|\underset{\sim}{X}_i),\mu(y_i|\underset{\sim}{Y}_i),i=1,2\}$

其中 $x_1,x_2,y_1,y_2\in R$, $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2\in C$

则 $\Gamma(x_1,x_2,y_1,y_2)=\pi(z_1,z_2)$

令 $\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{X}_1+\underset{\sim}{X}_2$, $\underset{\sim}{Y}=\underset{\sim}{Y}_1+\underset{\sim}{Y}_2$则有:

$$\mu(x|\underset{\sim}{X})=sup\{\pi(x_1,x_2)|x_1+x_2=x\}$$

$$\mu(y|\underset{\sim}{Y}) = sup\{\pi(y_1, y_2)|y_1 + y_2 = y\}$$

其中 $\pi(x_1, x_2) = min\{\mu(x_1|\underset{\sim}{X_1}), \mu(x_2|\underset{\sim}{X_2})\}$

$$\pi(y_1, y_2) = min\{\mu(y_1|\underset{\sim}{Y_1}), \mu(y_2|\underset{\sim}{Y_2})\}$$

若 $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{X} + i\underset{\sim}{Y}$,则 $\mu(z|\underset{\sim}{Z}) = min\{\mu(x|\underset{\sim}{X}), \mu(y|\underset{\sim}{Y})\}$

其中 $z = x + iy \in C$

(a)下面先讨论 $\mu(\omega|\underset{\sim}{W}) \leqslant \mu(\omega|\underset{\sim}{Z})$的情形

设 $\omega = x + iy$, $x_1 + x_2 = x, y_1 + y_2 = y$,则

$$\Gamma(x_1, x_2, y_1, y_2) \leqslant min\{\pi(x_1, x_2), \pi(y_1, y_2)\}$$

可知 $\Gamma(x_1, x_2, y_1, y_2) \leqslant min\{\mu(x|\underset{\sim}{X}), \mu(y|\underset{\sim}{Y})\}$

所以有:$\Gamma \leqslant \mu(\omega|\underset{\sim}{Z})$

即 $\mu(\omega|\underset{\sim}{W}) \leqslant \mu(\omega|\underset{\sim}{Z})$

(b)假设 $\mu(\omega|\underset{\sim}{Z}) \leqslant \mu(\omega|\underset{\sim}{W})$

设 $\omega = x + iy$,对 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_i^*, y_i^*, i = 1,2$

使得 $\pi(x_1^*, x_2^*) > \mu(x|\underset{\sim}{X}) - \varepsilon$

$$\pi(y_1^*, y_2^*) > \mu(y|\underset{\sim}{Y}) - \varepsilon$$

则有 $\Gamma(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) > \mu(\omega|\underset{\sim}{Z}) - \varepsilon$

即 $\mu(\omega|\underset{\sim}{W}) > \mu(\omega|\underset{\sim}{Z}) - \varepsilon$

由 ε 的任意性知:$\mu(\omega|\underset{\sim}{W}) \geqslant \mu(\omega|\underset{\sim}{Z})$

由以上(a)、(b)证明可知 $\mu(\omega|\underset{\sim}{W}) = \mu(\omega|\underset{\sim}{Z})$,即②成立

③由定理 3.1.9 知 $\underset{\sim}{Z}^\alpha = \underset{\sim}{X}^\alpha \times \underset{\sim}{Y}^\alpha$

由 *Fuzzy* 复数的加法性质可得

$$(\underset{\sim}{Z_1}^\alpha \pm \underset{\sim}{Z_2}^\alpha) = (\underset{\sim}{Z_1} \pm \underset{\sim}{Z_2})^\alpha, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

故$(\underset{\sim}{Z_1} \pm \underset{\sim}{Z_2})^\alpha = \underset{\sim}{Z_1}^\alpha \pm \underset{\sim}{Z_2}^\alpha \xlongequal{\text{定理 3.1.9}} (\underset{\sim}{X_1}^\alpha \pm \underset{\sim}{X_2}^\alpha) + i(\underset{\sim}{Y_1}^\alpha \pm \underset{\sim}{Y_2}^\alpha)$

④我们容易看到

$$|\underset{\sim}{Z}|^\alpha = |\underset{\sim}{Z}^\alpha| = \{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \mid x \in \underset{\sim}{X}^\alpha, y \in \underset{\sim}{Y}^\alpha\}$$

而 $$\{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \mid x \in \underset{\sim}{X}^\alpha, y \in \underset{\sim}{Y}^\alpha\} = [(\underset{\sim}{X}^\alpha)^2 + (\underset{\sim}{Y}^\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}$$

即④式得证。　　证毕.

由于$(\underset{\sim}{Z_1} \cdot \underset{\sim}{Z_2})^\alpha$不一定是矩形的,所以我们不能把这些结论运用于矩形 *Fuzzy* 复数的乘法运算,因此,式子

"$\underset{\sim}{Z_1} \cdot \underset{\sim}{Z_2} = (\underset{\sim}{X_1}\underset{\sim}{X_2} - \underset{\sim}{Y_1}\underset{\sim}{Y_2}) + i(\underset{\sim}{X_1}\underset{\sim}{Y_2} + \underset{\sim}{X_2}\underset{\sim}{Y_1})$"一般不成立。

(其中,$\underset{\sim}{Z_1} = \underset{\sim}{X_1} + i\,\underset{\sim}{Y_1}, \underset{\sim}{Z_2} = \underset{\sim}{X_2} + i\,\underset{\sim}{Y_2}$)

因为右边是一个矩形 *Fuzzy* 复数,而$\underset{\sim}{Z_1}\underset{\sim}{Z_2}$的 α 截集包含于$(\underset{\sim}{X_1}\underset{\sim}{X_2} - \underset{\sim}{Y_1}\underset{\sim}{Y_2}) + i(\underset{\sim}{X_1}\underset{\sim}{Y_2} + \underset{\sim}{X_2}\underset{\sim}{Y_1})$的 α 截集之中。

(2)矩形 *Fuzzy* 复数的 *Hamacher* 和

定义 3.1.16　设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 为两 *Fuzzy* 实数,$r \geqslant 0$ 为实数,则它们的 *Hamacher* 和(简写为 *Hr* 和)定义为:

$$(\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B})(t) = \sup_{x+y=t} Hr(\underset{\sim}{A}(x), \underset{\sim}{B}(y)), x、y、t \in R.$$

其中 $Hr(u,v) = \dfrac{uv}{r+(1-r)(u+v-uv)}, u、v \in [0,1].$

引理　设 $\underset{\sim}{A} = (a,\alpha), \underset{\sim}{B} = (b,\alpha)$为对称三角 *Fuzzy* 实数,$r \geqslant 0$ 为实数,则

$supp(\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}) = supp\,\underset{\sim}{A} + supp\,\underset{\sim}{B} =$

$[a-\alpha, a+\alpha] + [b-\alpha, b+\alpha] =$

$[a+b-2\alpha, a+b+2\alpha]$.

证明见文献[19]

矩形 *Fuzzy* 复数的 *Hamacher* 和

设 $\underset{\sim}{A}_j, \underset{\sim}{B}_j (j=1,2)$ 为 *Fuzzy* 实数，其隶属函数分别为 $\underset{\sim}{A}_j(x_j), \underset{\sim}{B}_j(y_j)$，则 $\underset{\sim}{Z}_j = \underset{\sim}{A}_j + i\underset{\sim}{B}_j (j=1,2, i^2=-1)$ 为矩形 *Fuzzy* 复数，其隶属函数记为 $\underset{\sim}{Z}_j(z_j)$. 其中 $\underset{\sim}{Z}_j(z_j) = min(\underset{\sim}{A}_j(x_j), \underset{\sim}{B}_j(y_j))$, $z_j = x_j + iy_j$, x_j、$y_j \in R$, $i^2=-1$.

定义 3.1.17 $\underset{\sim}{Z}_1$ 与 $\underset{\sim}{Z}_2$ 的 *Hamacher* 和记为 $\underset{\sim}{Z}_1 \oplus \underset{\sim}{Z}_2$，其隶属函数为

$$(\underset{\sim}{Z}_1 \oplus \underset{\sim}{Z}_2)(z) = \sup_{z_1+z_2=z} Hr(\underset{\sim}{Z}_1(z_1), \underset{\sim}{Z}_2(z_2)).$$

其中 *Hr* 是 *Hamacher* 算子.

下面具体就 $\underset{\sim}{A}_j, \underset{\sim}{B}_j$ 为对称三角 *Fuzzy* 实数情况下矩形 *Fuzzy* 复数 $\underset{\sim}{Z}_j = \underset{\sim}{A}_j + i\underset{\sim}{B}_j$ 的 *Hamacher* 和进行研究，得到结果：

定理 3.1.11 设 $\underset{\sim}{A}_j = (a_j, \alpha)$, $\underset{\sim}{B}_j = (b_j, \alpha)$，令 $0 \leqslant r \leqslant 2$, $\underset{\sim}{Z}_j = \underset{\sim}{A}_j + i\underset{\sim}{B}_j$, $j=1,2$, $i^2=-1$. 则 $\underset{\sim}{Z}_1$ 与 $\underset{\sim}{Z}_2$ 的 *Hamacher* 和 $\underset{\sim}{Z}_1 \oplus \underset{\sim}{Z}_2$ 具有下列隶属函数：

$$(\underset{\sim}{Z}_1 \oplus \underset{\sim}{Z}_2)(z) =$$

$$\begin{cases} min\left\{\dfrac{\left(1-\dfrac{|A-x|}{2\alpha}\right)^2}{1+(r-1)\left(\dfrac{|A-x|}{2\alpha}\right)^2}, \dfrac{\left(1-\dfrac{|B-y|}{2\alpha}\right)^2}{1+(r-1)\left(\dfrac{|B-y|}{2\alpha}\right)^2}\right\}, & |A-x|<2\alpha, |B-y|<2\alpha \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

其中，$A=a_1+a_2, B=b_1+b_2, z_j=x_j+iy_j, z=x+iy, x_j$、$y_j$、$x$、$y\in R, i^2=-1, j=1,2.$

证明 由矩形 *Fuzzy* 复数的定义及运算性质，根据引理有：

$(\underset{\sim}{Z}_1\oplus\underset{\sim}{Z}_2)(z)=min\{(\underset{\sim}{A}_1\oplus\underset{\sim}{A}_2)(x),(\underset{\sim}{B}_1\oplus\underset{\sim}{B}_2)(y)\}$,

其中，$A=a_1+a_2, B=b_1+b_2, z=x+iy.$

当$|A-x|<2\alpha$,时

$(\underset{\sim}{A}_1\oplus\underset{\sim}{A}_2)(x)=$

$$\sup_{x_1+x_2=x}\frac{\underset{\sim}{A}_1(x_1)\cdot\underset{\sim}{A}_2(x_2)}{r+(1-r)(\underset{\sim}{A}_1(x_1)+\underset{\sim}{A}_2(x_2)-\underset{\sim}{A}_1(x_1)\underset{\sim}{A}_2(x_2))};$$

当$|B-y|<2\alpha$,

$(\underset{\sim}{B}_1\oplus\underset{\sim}{B}_2)(y)=$

$$\sup_{y_1+y_2=y}\frac{\underset{\sim}{B}_1(y_1)\cdot\underset{\sim}{B}_2(y_2)}{r+(1-r)(\underset{\sim}{B}_1(y_1)+\underset{\sim}{B}_2(y_2)-\underset{\sim}{B}_1(y_1)\ \underset{\sim}{B}_2(y_2))};$$

其它情况下$(\underset{\sim}{A}_1\oplus\underset{\sim}{A}_2)(x)=0,(\underset{\sim}{B}_1\oplus\underset{\sim}{B}_2)(y)=0.$

下面就上面第一式进行计算，另一式与此相仿.

据 *Fuzzy* 数的分解规则，当 $A-2\alpha<x<A$ 时，第一式的计算问题等价于求下列数学模型的最优值：

$\varphi(x_1)=$

$$\frac{\left(1-\frac{a_1-x_1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{a_2-x+x_1}{\alpha}\right)}{r+(1-r)\left\{1-\frac{a_1-x_1}{\alpha}+1-\frac{a_2-x+x_1}{\alpha}-\left(1-\frac{a_1-x_1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{a_2-x+x_1}{\alpha}\right)\right.}$$

$\to$mxa

这里 $a_1-a\leqslant x_1\leqslant a_1, a_2-a\leqslant x-x_1\leqslant a_2.$

应用 *Lagrange* 乘数法对上模型进行求解，找到最优值为

$$\frac{\left(1-\frac{A-x}{2\alpha}\right)^2}{1+(r-1)\left(\frac{A-x}{2\alpha}\right)^2}$$；其惟一解为 $x_1=\frac{1}{2}(a_1-a_2+x)$，其中此处导数为 0. 事实上，由于 $\frac{\left(1-\frac{A-x}{2\alpha}\right)^2}{1+(r-1)\left(\frac{A-x}{2\alpha}\right)^2}\geqslant 1-\frac{A-x}{2}$，$A-2\alpha<x\leqslant A$ 及 $\varphi''\left(\frac{1}{2}(a_1-a_2+x)\right)<0$. 所以 φ 在单独稳定点 $\frac{1}{2}(a_1-a_2+x)$ 处取得条件极值.

当 $A\leqslant x\leqslant A+2\alpha$ 时，前面第一式计算问题等价于求解下列数学模型的最优值：

$$\frac{\left(1-\frac{x_1-a_1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x-x_1-a_2}{\alpha}\right)}{r+(1-r)\left\{1-\frac{x_1-a_1}{\alpha}+1-\frac{x-x_1-a_2}{\alpha}-\left(1-\frac{x_1-a_1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x-x_1-a_2}{\alpha}\right)\right.}$$

$\to$mxa

这里 $a_1\leqslant x_1\leqslant a_1+\alpha$，$a_2\leqslant x-x_1\leqslant a_2+\alpha$.

同样地我们可得到上面模型的最优值为

$$\frac{\left(1-\frac{x-A}{2\alpha}\right)^2}{1+(r-1)\left(\frac{x-A}{2\alpha}\right)^2}$$，其惟一解 $x_1=\frac{1}{2}(a_1-a_2-x)$，此处导数为 0.

由以上证明可得

$$(\underset{\sim}{A}_1 \oplus \underset{\sim}{A}_2)(x)=\begin{cases}\dfrac{\left(1-\dfrac{|A-x|}{2\alpha}\right)^2}{1+(r-1)\left(\dfrac{|A-x|}{2\alpha}\right)^2}, & |A-x|<2\alpha \\ 0 & ,\text{其它情况}\end{cases}$$

同理可得

$$(\underset{\sim}{B}_1 \oplus \underset{\sim}{B}_2)(y)-\begin{cases}\dfrac{\left(1-\dfrac{|B-y|}{2\alpha}\right)^2}{1+(r-1)\left(\dfrac{|B-y|}{2\alpha}\right)^2}, & |B-y|<2\alpha \\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$$

从而证明了

$$(\underset{\sim}{Z}_1 \oplus \underset{\sim}{Z}_2)(z)=$$

$$\begin{cases}min\left\{\dfrac{\left(1-\dfrac{|A-x|}{2\alpha}\right)^2}{1+(r-1)\left(\dfrac{|A-x|}{2\alpha}\right)^2},\dfrac{\left(1-\dfrac{|B-y|}{2\alpha}\right)^2}{1+(r-1)\left(\dfrac{|B-y|}{2\alpha}\right)^2}\right\}, & |B-y|<2\alpha,\ |A-x|<2\alpha \\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$$

(3)极模型模糊复数($z=re^{i\theta}$)

设 $\overline{R}\geqslant 0$ 和 $\overline{\theta}$ 是两个不相等的模糊实数,并 $supp(\overline{\theta})$的直径 $<2\pi$,所以 $\overline{Z}=\overline{R}exp(i\,\overline{\theta})$是一个模糊复数,其隶属函数为:

$\mu(z|\overline{Z})=min(\mu(r|\overline{R}),\mu(\theta|\overline{\theta}))$

其中 $z=re^{i\theta}$

定理 3.1.12 $\overline{Z}^{\alpha}=\overline{R}^{\alpha}exp(i\,\overline{\theta}^{\alpha}),0\leqslant\alpha\leqslant 1$

证明:

先建立集合$\{re^{i\theta}|r\in\overline{R}^{\alpha},\theta\in\overline{\theta}^{\alpha}\}$使得

$\overline{R}^{\alpha}\,exp(i\,\theta^{\alpha})=\{re^{i\theta}|r\in\overline{R}^{\alpha},\theta\in\overline{\theta}^{\alpha}\}$

①设 $0 \leqslant \alpha < 1$

如果 $z \in \overline{Z}^{\alpha}$,则 $min(\mu(r|\overline{R}),\mu(\theta|\overline{\theta})) > \alpha$

$\therefore \quad \mu(r|\overline{R}) > \alpha, \mu(\theta|\overline{\theta}) > \alpha$

$\therefore (r,\theta) \in \{re^{i\theta} | r \in \overline{R}^{\alpha}, \theta \in \overline{\theta}^{\alpha}\}$

反之,若$(r,\theta) \in \{re^{i\theta} | r \in \overline{R}^{\alpha}, \theta \in \overline{\theta}^{\alpha}\}$

则 $min(\mu(r|\overline{R}),\mu(\theta|\overline{\theta})) > \alpha$

$\therefore \mu(z|\overline{Z}) > \alpha$

即 $z \in \overline{Z}^{\alpha}$,其中 $\overline{Z} = \overline{R}e^{i\overline{\theta}}$

②当 $\alpha = 1$

如果$(r,\theta) \in \{re^{i\theta} | r \in \overline{R}^{1}, \theta \in \overline{\theta}^{1}\}$,则对 $z = re^{i\theta}$有 $\mu(z|\overline{Z}) = 1$, $\therefore z \in \overline{Z}^{1}$

反之,若 $z \in \overline{Z}^{1}$,那么$\exists\, r,\theta$ 使得

$z = re^{i\theta}$,且 $\mu(r|\overline{R}) = \mu(\theta|\overline{\theta}) = 1$

$\therefore (r,\theta) \in \{re^{i\theta} | r \in \overline{R}^{1}, \theta \in \overline{\theta}^{1}\}$

即此定理得证。

定理 3.1.13

①如果 $\overline{Z}_j = \overline{R}_j exp(i\,\overline{\theta}_j), j = 1,2$ 则有

$(a)\overline{Z}_1\overline{Z}_2 = \overline{R}_1\overline{R}_2 exp(i[\overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_2])$;

$(b)|\overline{Z}_1\overline{Z}_2| = \overline{R}_1\overline{R}_2$;

$(c)\overline{Z}_1/\overline{Z}_2 = \overline{R}_1\overline{R}_2^{-1} exp(i[\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2])$;

②$\overline{Z}^{*} = \overline{R}exp(i[-\overline{\theta}])$;

[注:$\overline{Z}^{*}$ 是 $\overline{Z}$ 的共轭,其定义为

$\mu(\overline{z}|\overline{Z}^{*}) = \mu(\overline{z}|\overline{Z})$

其中 $\overline{z} = re^{-i\theta}$是 $z = re^{i\theta}$的共轭]

③$|\overline{Z}|=\overline{R}$；

［注：$|\overline{Z}|$是 $\overline{Z}$ 的模，其定义为 $\mu(r||\overline{Z}|)=sup\{\mu(z|\overline{Z})||\overline{Z}|=r\}$，其中 r 是 z 的模］

④$\overline{Z}^{-1}=\overline{R}^{-1}exp(i[-\overline{\theta}])$；

［注：$\overline{Z}^{-1}$是 $\overline{Z}$ 的倒数，其定义为 $\mu(z|\overline{Z}^{-1})=\mu(z^{-1}|\overline{Z})$］

⑤$(\overline{Z}_1\overline{Z}_2)^{\alpha}=\overline{R}_1^{\alpha}\overline{R}_2^{\alpha}exp(i[\overline{\theta}_1^{\alpha}+\overline{\theta}_2^{\alpha}])$

其中 $0\leqslant\alpha\leqslant1$

证明：

①

(a)式显然成立，略。

(b)式：我们先证③式，再证①(b)式，

$\because\mu(r||\overline{Z}|)=sup\{\mu(z|\overline{z})||\overline{Z}|=r\}$

$\mu(z|\overline{Z})=min\{\mu(r|\overline{R}),\mu(\theta|\overline{\theta})\}$

所有的模糊实数和模糊复数都是规范的，所以可选取 θ，使 $\mu(\theta|\overline{\theta})=1$，从而有 $\mu(r||\overline{Z}|)=\mu(r|\overline{R})$

$\therefore|\overline{Z}|=\overline{R}$，即③式成立。

$\because$由①(a)式有 $\overline{Z}_1\overline{Z}_2=\overline{R}_1\overline{R}_2exp(i[\overline{\theta}_1+\overline{\theta}_2])$

由完备性可设 $\overline{Z}=\overline{Z}_1\overline{Z}_2,\overline{R}=\overline{R}_1\overline{R}_2,\overline{\theta}=\overline{\theta}_1+\underset{\sim}{\theta}_2$

上式变为 $\overline{Z}=\overline{R}exp(i\,\overline{\theta})$；

由③式有$|\overline{Z}|=\overline{R}$

$\therefore|\overline{Z}_1\overline{Z}_2|=\overline{R}_1\overline{R}_2$，即①$(b)$式得证。

(c)式：我们先证④式，再证①(c)式：

$\because\mu(\overline{z}|\overline{Z}^{-1})=\mu(\overline{z}^{-1}|\overline{Z})$

且 $\mu(z|\overline{Z})=min(\mu(r|\overline{R}),\mu(\theta|\overline{\theta}))$

$\mu(\overline{z}^{-1}|\overline{Z}) = min(\mu(r^{-1}|\overline{R}), \mu(\theta^{-1}|\overline{\theta}))$

而 $z = re^{i\theta}, z^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}, \overline{Z} = \overline{R}exp(i\,\overline{\theta})$

$\therefore \overline{Z}^{-1} = \overline{R}^{-1}exp[i(-\overline{\theta})]$，即④式成立。

由①(a)式得 $\overline{Z}_1\overline{Z}_{21} = \overline{R}_1\overline{R}_{21}\ exp(i[\overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_2])$；

设 $\overline{Z}_{21} = \overline{Z}_2^{-1} = \overline{R}_2^{-1}exp(i[-\overline{\theta}_2])$

代入上式得：

$\overline{Z}_1\overline{Z}_2^{-1} = \overline{R}_1\overline{R}_2^{-1}\ exp(i[\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2])$

即①(c)式得证

②式：

$\because \mu(z|\overline{Z}^*) = \mu(\overline{z}|\overline{Z})$

$\overline{z} = re^{-i\theta}, z = re^{i\theta}$

（这里 $\overline{z}$ 为 z 的共轭复数）

$\therefore \overline{Z}^* = \overline{R}exp(i[-\overline{\theta}])$

即②式成立

⑤式：

由①(a)得 $\overline{Z}_1\overline{Z}_2 = \overline{R}_1\overline{R}_2exp(i[\overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_2])$

设 $\overline{Z} = \overline{Z}_1\overline{Z}_2, \overline{R} = \overline{R}_1\overline{R}_2, \overline{\theta} = \overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_2$，

则上式变为 $\overline{Z} = \overline{R}exp(i\,\overline{\theta})$，再由定理 3.1.12 得 $\overline{Z}^{\alpha} = \overline{R}^{\alpha}exp(i\,\overline{\theta}^{\alpha})$；

又$\because R_1$、R_2 均为模糊实数

$\therefore \overline{R}^{\alpha} = (\overline{R}_1\overline{R}_2)^{\alpha} = \overline{R}_1^{\alpha}\overline{R}_2^{\alpha}$

由加法性质有，当 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时

$\overline{\theta}^{\alpha} = (\overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_2)^{\alpha} = \overline{\theta}_1^{\alpha} + \overline{\theta}_2^{\alpha}$

$\therefore (Z_1\overline{Z}_2)^{\alpha} = \overline{R}_1^{\alpha}\overline{R}_2^{\alpha}exp(i[\overline{\theta}_1^{\alpha} + \overline{\theta}_2^{\alpha}]), 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

即⑤式成立.　　证毕.

这些结论不能运用于只有“$Z=re^{i\theta}$”形式的模糊复数的加、减法运算中。

§ 3.2　复模糊集与复模糊数

本节3.2.1～3.2.7(二)详细内容参见文献[10],3.2.7(三)、(四)详细内容参见文献[17].

3.2.1　复模糊集合及其运算

定义 3.2.1　设 R 为实数域,C 是复数域,对于 $\forall \underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}\in F(R)$,称 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\,\underset{\sim}{Y}$ 为复模糊集合,简称复 F 集。

对于 $\forall z=x+iy\in C$,称

$\underset{\sim}{Z}(z)=(\underset{\sim}{X}+i\,\underset{\sim}{Y})(x+iy)=\underset{\sim}{X}(x)\wedge\underset{\sim}{Y}(y)$为 $z=x+iy$ 相对于复模糊集合 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\,\underset{\sim}{Y}$ 的隶属程度。

$\underset{\sim}{Z}(\cdot)=\underset{\sim}{X}(\cdot)\wedge\underset{\sim}{Y}(\cdot)$

称为复模糊集 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\,\underset{\sim}{Y}$ 的隶属函数。用 $C^F(C)$表示 C 上的复模糊集合之全体,即

$C^F(C)=\{\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\,\underset{\sim}{Y}\mid\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}\in F(R)\}$

定义 3.2.2　设 $\underset{\sim}{Z_1}=\underset{\sim}{X_1}+i\underset{\sim}{Y_1},\underset{\sim}{Z_2}=\underset{\sim}{X_2}+i\,\underset{\sim}{Y_2}\in C^F(C)$,称

$\underset{\sim}{Z_1}$ 包含 $\underset{\sim}{Z_2}$,记为 $\underset{\sim}{Z_1}\supseteq\underset{\sim}{Z_2}$,当且仅当对 $\forall\ z=x+iy\in C$,恒有

$\underset{\sim}{X_1}(x)\geqslant\underset{\sim}{X_2}(x),\underset{\sim}{Y_1}(y)\geqslant\underset{\sim}{Y_2}(y)$

称 $\underset{\sim}{Z_1}$ 与 $\underset{\sim}{Z_2}$ 相等,记为 $\underset{\sim}{Z_1}=\underset{\sim}{Z_2}$,当且仅当对 $\forall z=x+iy\in C$,恒有

$$\underset{\sim}{X}_1(x)=\underset{\sim}{X}_2(x),\underset{\sim}{Y}_1(y)=\underset{\sim}{Y}_2(y)$$

称 $\underset{\sim}{Z}_1$ 真包含 $\underset{\sim}{Z}_2$，记为 $\underset{\sim}{Z}_1\supset\underset{\sim}{Z}_2$，当且仅当对 $\forall z=x+iy\in C$，恒有

$\underset{\sim}{X}_1(x)\geqslant\underset{\sim}{X}_2(x)$，并 $\underset{\sim}{Y}_1(y)\geqslant\underset{\sim}{Y}_2(y)$，且 $\exists z_0=x_0+iy_0\in C$，使 $\underset{\sim}{X}_1(x_0)>\underset{\sim}{X}_2(x_0)$ 且 $\underset{\sim}{Y}_1(y_0)>\underset{\sim}{Y}_2(y_0)$.

定义 3.2.3 设 $\underset{\sim}{Z}_1=\underset{\sim}{X}_1+i\underset{\sim}{Y}_1,\underset{\sim}{Z}_2=\underset{\sim}{X}_2+i\underset{\sim}{Y}_2\in C^F(C)$，$\underset{\sim}{Z}_1$，$\underset{\sim}{Z}_2$ 的交、并运算 $\cap,\cup$ 定义为：对 $\forall z=x+iy\in C$，

$$(\underset{\sim}{Z}_1\cap\underset{\sim}{Z}_2)(z)\triangleq(\underset{\sim}{X}_1\cap\underset{\sim}{X}_2)(x)\wedge(\underset{\sim}{Y}_1\cap\underset{\sim}{Y}_2)(y)$$
$$=(\underset{\sim}{X}_1(x)\wedge\underset{\sim}{X}_2(x))\wedge(\underset{\sim}{Y}_1(y)\wedge\underset{\sim}{Y}_2(y))$$
$$(\underset{\sim}{Z}_1\cup\underset{\sim}{Z}_2)(z)\triangleq(\underset{\sim}{X}_1\cup\underset{\sim}{X}_2)(x)\wedge(\underset{\sim}{Y}_1\cup\underset{\sim}{Y}_2)(y)$$
$$=(\underset{\sim}{X}_1(x)\vee\underset{\sim}{X}_2(x))\wedge(\underset{\sim}{Y}_1(y)\vee\underset{\sim}{Y}_2(y))$$

设 $\{\underset{\sim}{Z}_r=\underset{\sim}{X}_r+i\underset{\sim}{Y}_r,r\in\Gamma\}\subseteq C^F(C)$，则复模糊集合的无限交与无限并运算定义为：对 $\forall z=x+iy\in C$，

$$(\bigcap_{r\in\Gamma}\underset{\sim}{Z}_r)(z)\triangleq(\bigcap_{r\in\Gamma}\underset{\sim}{X}_r)(x)\wedge(\bigcap_{r\in\Gamma}\underset{\sim}{Y}_r)(y)$$
$$=(\bigwedge_{r\in\Gamma}\underset{\sim}{X}_r(x))\wedge(\bigwedge_{r\in\Gamma}\underset{\sim}{Y}_r(y))$$
$$(\bigcup_{r\in\Gamma}\underset{\sim}{Z}_r)(z)\triangleq(\bigcup_{r\in\Gamma}\underset{\sim}{X}_r)(x)\wedge(\bigcup_{r\in\Gamma}\underset{\sim}{Y}_r)(y)$$
$$=(\bigvee_{r\in\Gamma}\underset{\sim}{X}_r(x))\wedge(\bigvee_{r\in\Gamma}\underset{\sim}{Y}_r(y))$$

显然，$\underset{\sim}{Z}_1\cap\underset{\sim}{Z}_2,\underset{\sim}{Z}_1\cup\underset{\sim}{Z}_2,\bigcap_{r\in\Gamma}\underset{\sim}{Z}_r,\bigcup_{r\in\Gamma}\underset{\sim}{Z}_r\in C^F(C)$。

定义 3.2.4 设 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\underset{\sim}{Y}\in C^F(C)$，称

$$(\underset{\sim}{Z})_\alpha\triangleq Z_\alpha=(\underset{\sim}{X}+i\underset{\sim}{Y})_\alpha\triangleq X_\alpha+iY_\alpha$$
$$=\{z=x+iy\mid x\in X_\alpha,y\in Y_\alpha\}$$

为复模糊集合 $\underset{\sim}{Z}$ 的 α 水平复集。其中 X_α 和 Y_α 分别为模糊集 $\underset{\sim}{X}$

和 $\underset{\sim}{Y}$ 的 α 水平集。称

$$(\underset{\sim}{Z})_{\underset{\cdot}{\alpha}} \triangleq Z_{\underset{\cdot}{\alpha}} = (\underset{\sim}{X} + i\ \underset{\sim}{Y})_{\underset{\cdot}{\alpha}} \triangleq X_{\underset{\cdot}{\alpha}} + i\ Y_{\underset{\cdot}{\alpha}}$$

$$= \{z = x + iy \mid x \in X_{\underset{\cdot}{\alpha}},\ y \in Y_{\underset{\cdot}{\alpha}}\}$$

为复模糊集合 $\underset{\sim}{Z}$ 的强 α 水平复集。其中 $X_{\underset{\cdot}{\alpha}}$, $Y_{\underset{\cdot}{\alpha}}$ 分别为模糊集合 $\underset{\sim}{X}$ 和 $\underset{\sim}{Y}$ 的强 α 水平集。称

$$Z_{\underset{\cdot}{0}} = supp\ \underset{\sim}{Z} = supp(\underset{\sim}{X} + i\ \underset{\sim}{Y}) \triangleq supp\ \underset{\sim}{X} + i\ supp\ \underset{\sim}{Y}$$

$$= \{z = x + iy \mid x \in supp\ \underset{\sim}{X},\ y \in supp\ \underset{\sim}{Y}\}$$

为复模糊集合 $\underset{\sim}{Z}$ 的支复集。其中 $supp\ \underset{\sim}{X}$, $supp\ \underset{\sim}{Y}$ 分别是模糊集 $\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{Y}$ 的支集。

定理 3.2.1 设 $\underset{\sim}{Z}_1 = \underset{\sim}{X}_1 + i\ \underset{\sim}{Y}_1$, $\underset{\sim}{Z}_2 = \underset{\sim}{X}_2 + i\ \underset{\sim}{Y}_2 \in C^F(C)$,则 α 水平复集和强 α 水平复集有如下性质:

(1) $(\underset{\sim}{Z}_1 \cap \underset{\sim}{Z}_2)_\alpha = Z_{1,\alpha} \cap Z_{2,\alpha}$

$(\underset{\sim}{Z}_1 \cup \underset{\sim}{Z}_2)_\alpha = Z_{1,\alpha} \cup Z_{2,\alpha}$

(2) $(\underset{\sim}{Z}_1 \cup \underset{\sim}{Z}_2)_{\underset{\cdot}{\alpha}} = Z_{1,\underset{\cdot}{\alpha}} \cup Z_{2,\underset{\cdot}{\alpha}}$

$(\underset{\sim}{Z}_1 \cap \underset{\sim}{Z}_2)_{\underset{\cdot}{\alpha}} = Z_{1,\underset{\cdot}{\alpha}} \cap Z_{2,\underset{\cdot}{\alpha}}$

定理 3.2.2 如果 $\{\underset{\sim}{Z}_r = \underset{\sim}{X}_r + i\ \underset{\sim}{Y}_r,\ r \in \Gamma\} \subseteq C^F(C)$,则

(1) $(\bigcup_{r \in \Gamma} \underset{\sim}{Z}_r)_\alpha \supseteq \bigcup_{r \in \Gamma} \underset{\sim}{Z}_{r,\alpha}$

(2) $(\bigcap_{r \in \Gamma} \underset{\sim}{Z}_r)_\alpha = \bigcap_{r \in \Gamma} \underset{\sim}{Z}_{r,\alpha}$

(3) $(\bigcup_{r \in \Gamma} \underset{\sim}{Z}_r)_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \bigcup_{r \in \Gamma} \underset{\sim}{Z}_{r,\underset{\cdot}{\alpha}}$

(4) $(\bigcap_{r \in \Gamma} \underset{\sim}{Z}_r)_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq \bigcap_{r \in \Gamma} \underset{\sim}{Z}_{r,\underset{\cdot}{\alpha}}$

注意(1)(4)不能换为等式。

定理 3.2.3 设 $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{X} + i\ \underset{\sim}{Y} \in C^F(C)$, $\{\alpha_r,\ r \in \Gamma\} \subseteq [0,1]$,

则

$$(1) Z_\alpha=\bigcap_{r\in\Gamma} Z_{\alpha_r}=(\bigcap_{r\in\Gamma} X_{\alpha_r})+i(\bigcap_{r\in\Gamma} Y_{\alpha_r})$$

$$Z_\lambda\supseteq\bigcup_{r\in\Gamma} Z_{\alpha_r}=(\bigcup_{r\in\Gamma} X_{\alpha_r})+i(\bigcup_{r\in\Gamma} Y_{\alpha_r})$$

$$(2) Z_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq\bigcap_{r\in\Gamma} Z_{\underset{\cdot}{\alpha}_r}=(\bigcap_{r\in\Gamma} X_{\underset{\cdot}{\alpha}_r})+i(\bigcap_{r\in\Gamma} Y_{\underset{\cdot}{\alpha}_r})$$

$$Z_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{r\in\Gamma} Z_{\underset{\cdot}{\alpha}_r}=(\bigcup_{r\in\Gamma} X_{\underset{\cdot}{\alpha}_r})+i(\bigcup_{r\in\Gamma} Y_{\underset{\cdot}{\alpha}_r})$$

其中　$\alpha=\bigvee_{r\in\Gamma}\alpha_r$，$\lambda=\bigwedge_{r\in\Gamma}\alpha_r$

定理 3.2.4　如果 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\ \underset{\sim}{Y}\in C^F(C)$，则

$$(1) Z_\alpha=\bigcap_{\lambda<\alpha} Z_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

$$(2) Z_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\bigcup_{\lambda>\alpha} Z_\lambda$$

3.2.2　复模糊集合的分解定理

定义 3.2.5　设 $\alpha\in[0,1]$，$\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\ \underset{\sim}{Y}\in C^F(C)$，$\alpha$ 与 $\underset{\sim}{Z}$ 的数积定义为：对 $\forall\ z=x+iy\in C$

$$(\alpha\ \underset{\sim}{Z})(z)\triangleq(\alpha\wedge\ \underset{\sim}{X}(x))\wedge(\alpha\wedge\ \underset{\sim}{Y}(y))$$

定理 3.2.5　（复模糊集合分解定理Ⅰ）如果

$\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\ \underset{\sim}{Y}\in C^F(C)$，则

$$(1)\underset{\sim}{Z}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha Z_\alpha=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha(X_\alpha+i\ Y_\alpha)$$

$$\triangleq\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha X_\alpha+i\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha Y_\alpha$$

$$(2)\underset{\sim}{Z}=\bigcup_{\alpha\in[0,1)}\alpha Z_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\bigcup_{\alpha\in[0,1)}\alpha(X_{\underset{\cdot}{\alpha}}+i\ Y_{\underset{\cdot}{\alpha}})$$

$$\triangleq\bigcup_{\alpha\in[0,1)}\alpha X_{\underset{\cdot}{\alpha}}+i\bigcup_{\alpha\in[0,1)}\alpha Y_{\underset{\cdot}{\alpha}}$$

(3)如果 Q 为[0,1]中的有理点集，则

$$\underset{\sim}{Z}=\bigcup_{\alpha\in Q}\alpha Z_\alpha=\bigcup_{\alpha\in Q}\alpha Z_{\underset{\cdot}{\alpha}}$$

定理 3.2.6　设 $\underset{\sim}{Z}_1=\underset{\sim}{X}_1+i\ \underset{\sim}{Y}_1$，$\underset{\sim}{Z}_2=\underset{\sim}{X}_2+i\ \underset{\sim}{Y}_2\in C^F(C)$，则

(1)$\underset{\sim}{Z}_1 \subseteq \underset{\sim}{Z}_2$当且仅当 $Z_{1,\alpha} \subseteq Z_{2,\alpha}, \alpha \in [0,1]$ 或者 $Z_{1,\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq Z_{2,\underset{\cdot}{\alpha}}, \alpha \in [0,1)$ 或者 $Z_{1,\alpha} \subseteq Z_{2,\alpha}, \alpha \in Q$

(2)$\underset{\sim}{Z}_1 = \underset{\sim}{Z}_2$当且仅当 $Z_{1,\alpha} = Z_{2,\alpha}, \alpha \in [0,1]$或者 $Z_{1,\underset{\cdot}{\alpha}} = Z_{2,\underset{\cdot}{\alpha}}$, $\alpha \in [0,1)$或者 $Z_{1,\alpha} = Z_{2,\alpha}, \alpha \in Q$

定理 3.2.7 （分解定理Ⅱ）设 $\underset{\sim}{Z} - \underset{\sim}{X} + i\,\underset{\sim}{Y} \in C^F(C)$，令

$H:[0,1] \to P(C), \alpha \to H(\alpha)$，满足：

$Z_{\underset{\cdot}{\alpha}} = X_{\underset{\cdot}{\alpha}} + i\,Y_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq Z_\alpha = X_\alpha + iY_\alpha$，则

(1)$\underset{\sim}{Z} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha H(\alpha)$

(2)$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow H(\alpha_1) \subseteq H(\alpha_2)$

(3)$Z_\alpha = \bigcap_{\lambda < \alpha} H(\lambda), \alpha \in (0,1]$

(4)$Z_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \bigcup_{\lambda > \alpha} H(\lambda), \alpha \in [0,1)$

3.2.3 复模糊集合的表现定理

定义 3.2.6 设 C 为复数域。令

$H:[0,1] \to P(C), \alpha \to H(\alpha) = H_1(\alpha) + iH_2(\alpha)$

满足 $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow H(\alpha_1) = H_1(\alpha_1) + iH_2(\alpha_1)$

$\supseteq H(\alpha_2) = H_1(\alpha_2) + iH_2(\alpha_2)$

称 H 为 C 上的一个复集合套。用 $C^u(C)$表示全体复集合套。

定义 3.2.7 设 $H_1 = H_{11} + iH_{12}, H_2 = H_{21} + iH_{22} \in C^u(C)$，定义运算$\cup, \cap$如下：

$$(H_1 \cup H_2)(\alpha) \triangleq (H_{11} \cup H_{21})(\alpha) + i\,(H_{12} \cup H_{22})(\alpha)$$

$$= H_{11}(\alpha) \cup H_{21}(\alpha) + i\,(H_{12}(\alpha) \cup H_{22}(\alpha))$$

$$(H_1 \cap H_2)(\alpha) \triangleq (H_{11} \cap H_{21})(\alpha) + i(H_{12} \cap H_{22})(\alpha)$$

$$= H_{11}(\alpha) \cap H_{21}(\alpha) + i(H_{12}(\alpha) \cap H_{22}(\alpha))$$

设$\{H_r = H_{r1} + iH_{r2}, r \in \Gamma\} \subseteq C^u(C)$,定义复集合套的无限并与交运算如下:

$$(\bigcup_{r\in\Gamma} H_r)(\alpha) \triangleq (\bigcup_{r\in\Gamma} H_{r1})(\alpha) + i(\bigcup_{r\in\Gamma} H_{r2})(\alpha) = \bigcup_{r\in\Gamma} H_{r1}(\alpha) + i(\bigcup_{r\in\Gamma} H_{r2}(\alpha)).$$

$$(\bigcap_{r\in\Gamma} H_r)(\alpha) \triangleq (\bigcap_{r\in\Gamma} H_{r1})(\alpha) + i(\bigcap_{r\in\Gamma} H_{r2})(\alpha) = \bigcap_{r\in\Gamma} H_{r1}(\alpha) + i\bigcap_{r\in\Gamma} H_{r2}(\alpha).$$

分解定理进一步揭示了复模糊集合的表现问题,说明复集合$\underset{\sim}{Z}$可由复集合套$H(Z_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq Z_\alpha)$来表示,反过来有一个问题是:是否每个复集合套均可表示一个复模糊集合?下面结论给予了肯定回答。

定理 3.2.8 (复模糊集合的表现定理) 令

$T: C^u(C) \to C^F(C)$

$$H \to T(H) \triangleq \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha H(\alpha)$$

$$\triangleq \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha H_1(\alpha) + i(\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha H_2(\alpha))$$

$$\triangleq T(H_1) + i\,T(H_2),$$

则 T 是$C^u(C)$到 $C^F(C)$上的满射,且

$$T(H)_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq T(H)_\alpha, \alpha \in [0,1]$$

$$T(H)_\alpha = \bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda), \alpha \in (0,1]$$

$$T(H)_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \bigcup_{\lambda>\alpha} H(\lambda), \alpha \in [0,1)$$

3.2.4 复模糊集合的扩张原理

扩张原理是模糊集合理论的基本定理,它将一个复集合 U 到复集合 V 的映射 f 扩展为一个 $C^F(C)$到 $C^F(V)$的映照。

设有映照：

$f:U\subseteq C\rightarrow V\subseteq C$

复集合 $D=D_1+iD_2\subseteq U, E=E_1+iE_2\subseteq V$，其中 $D_1, D_2, E_1, E_2\in F(R)$，对于 $\forall z=x+iy\in D$，将 f 表示为：

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y), x\in D_1, y\in D_2$，其中，$u, v$ 是区域 $D_1\times D_2$ 到 R 的二元实函数。

经典扩展原理：f 可诱导出

$f:P(U)\rightarrow P(V)$

$$D\rightarrow f(D)=\{w=u+iv \mid \exists z=x+iy\in D, w=f(z)\}$$
$$=\{(u,v)\mid \exists x\in D_1, y\in D_2, u=u(x,y), v=v(x,y)\}$$

$f^{-1}:P(V)\rightarrow P(U)$，

$$E\rightarrow f^{-1}(E)=\{z=x+iy \mid f(z)\in E\}$$
$$=\{(x,y)\mid u(x,y)\in E_1, v(x,y)\in E_2\}$$

称 $f(D)$ 为 D 的象，$f^{-1}(E)$ 为 E 的逆象。

将经典扩展原理推广到复模糊集合便得到下面的扩展原理。

定义 3.2.8 设 $f:U\subseteq C\rightarrow V\subseteq C$，

$$z\rightarrow f(z)$$

则 f 可诱导出一个从 $C^F(U)$ 到 $C^F(V)$ 的映照及一个从 $C^F(V)$ 到 $C^F(U)$ 的映照：

$f:C^F(U)\rightarrow C^F(V)$，

$\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{D}_1+i\underset{\sim}{D}_2\rightarrow f(\underset{\sim}{D})=f(\underset{\sim}{D}_1+i\underset{\sim}{D}_2)$

$f^{-1}: C^F(V) \to C^F(U)$,

$\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{E}_1 + i\underset{\sim}{E}_2 \to f^{-1}(\underset{\sim}{E}) = f^{-1}(\underset{\sim}{E}_1 + i\underset{\sim}{E}_2)$

$f(D)$与$f^{-1}(\underset{\sim}{E})$的隶属函数分别定义为：

$$f(\underset{\sim}{D})(w) \triangleq \bigvee_{f(z)=w} \underset{\sim}{D}(z) = (\bigvee_{f(x+iy)=w} \underset{\sim}{D}_1(x)) \wedge (\bigvee_{f(x+iy)=w} \underset{\sim}{D}_2(y))$$

$$f^{-1}(\underset{\sim}{E})(z) \triangleq \underset{\sim}{E}(f(z)) = \underset{\sim}{E}(u+iv) = \underset{\sim}{E}_1(u) \wedge \underset{\sim}{E}_2(v)$$

称$f(\underset{\sim}{D})$为复模糊集合$\underset{\sim}{D}$的象，称$f^{-1}(\underset{\sim}{E})$为复模糊集合$\underset{\sim}{E}$的逆象。

下面从复集合套的观点出发，给出复模糊集合的扩展原理的等价定义。

设

$$f: U \subseteq C \to V \subseteq C, z \to f(z) = w$$

给定 $\underset{\sim}{Z} \in C^F(U)$, $\forall \alpha \in [0,1]$，按经典扩展原理求得$f(Z_\alpha)$。由于

$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow Z_{\alpha_1} \supseteq Z_{\alpha_2} \Rightarrow f(Z_{\alpha_1}) \supseteq f(Z_{\alpha_2})$

因此$\{f(Z_\alpha) | \alpha \in [0,1]\}$给出 V 上的一个复集合套，根据复模糊集合的表现定理，它惟一确定一个复模糊集合

$f(\underset{\sim}{Z}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha f(Z_\alpha) \in C^F(V)$，并且

$f(\underset{\sim}{Z})_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq f(Z_\alpha) \subseteq f(\underset{\sim}{Z})_\alpha$

$f(\underset{\sim}{Z})_\alpha = \bigcap_{\lambda < \alpha} f(Z_\lambda), \alpha \in (0,1]$

$f(\underset{\sim}{Z})_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \bigcup_{\lambda > \alpha} f(Z_\lambda), \alpha \in [0,1)$

同样，对$\underset{\sim}{E} \in C^F(V)$，可惟一确定一个复模糊集合

$$f^{-1}(\underset{\sim}{E})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f^{-1}(E_\alpha)\in C^F(U)$$

定义 3.2.9 （复模糊集合的扩展原理Ⅰ）设映照

$$f:U\subseteq C\to V\subseteq C,z\to f(z)$$

则 f 可诱导出一个 $C^F(U)$ 到 $C^F(V)$ 的映照及一个从 $C^F(V)$ 到 $C^F(U)$ 的映照：

$$f:C^F(U)\to C^F(V),$$

$$\underset{\sim}{D}\to f(\underset{\sim}{D})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(D_\alpha)$$

$$f^{-1}:C^F(V)\to C^F(U),$$

$$\underset{\sim}{E}\to f^{-1}(\underset{\sim}{E})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f^{-1}(E_\alpha)$$

称 $f(\underset{\sim}{D})$ 为 $\underset{\sim}{D}$ 的象，称 $f^{-1}(\underset{\sim}{E})$ 为 $\underset{\sim}{E}$ 的逆象。

上面两定义的等价性由下列定理给出。

定理 3.2.9 设 $f:V\subseteq C\to V\subseteq C,z\to f(z)=w=u+iv.$

(1)如果 $\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{D}_1+i\,\underset{\sim}{D}_2\in C^F(U)$，则对 $\forall\ z=x+iy\in C$，

$$\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(D_\alpha)\right)(w)=\bigvee_{f(z)=w}\underset{\sim}{D}(z)$$
$$=\left(\bigvee_{f(x+iy)=w}\underset{\sim}{D}_1(x)\right)\wedge\left(\bigvee_{f(x+iy)=w}\underset{\sim}{D}_2(y)\right)$$

(2)如果 $\underset{\sim}{E}=\underset{\sim}{E}_1+i\,\underset{\sim}{E}_2\in C^F(V)$，则对 $z=x+iy\in C$，

$$\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f^{-1}(E_\alpha)\right)(z)=\underset{\sim}{E}(f(z))=\underset{\sim}{E}_1(u)\wedge E_2(v)$$

复模糊集合的扩展原理还可以用下列两种形式表示。

定理 3.2.10 （复模糊集合的扩展原理Ⅱ）设

$$f:U\subseteq C\to V\subseteq C,z\to f(z)=w=u+iv$$

(1)若 $\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{D}_1+i\,\underset{\sim}{D}_2\in C^F(U)$，则

$$f(\underset{\sim}{D})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(D_\alpha)$$

(2)如果 $\underset{\sim}{E}=\underset{\sim}{E}_1+i\,\underset{\sim}{E}_2\in C^F(V)$，则

$f^{-1}(\underset{\sim}{E}) = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1)} \alpha f^{-1}(E_{\underset{\cdot}{\alpha}})$.

定理 3.2.11 （复模糊集合的扩展原理Ⅲ）设

$f: U \subseteq C \to V \subseteq C, z \to f(z) = w = u + iv$

(1)如果 $\underset{\sim}{D} \in C^F(U)$，则 $f(\underset{\sim}{D}) = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha f(H_D(\alpha))$，

其中 $D_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H_D(\alpha) \subseteq D_\alpha$

(2)如果 $\underset{\sim}{E} \in C^F(V)$，则 $f^{-1}(\underset{\sim}{E}) = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha f^{-1}(H_E(\alpha))$，

其中

$$E_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H_E(\alpha) \subseteq E_\alpha$$

关于 $f(\underset{\sim}{D})$ 与 $f^{-1}(\underset{\sim}{E})$ 的 α 水平复集合，根据复模糊集合的分解定理Ⅱ及表现定理，我们可得到下列性质：

(1) $f(\underset{\sim}{D})_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq f(H_D(\alpha)) \subseteq f(\underset{\sim}{D})_\alpha, D_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H_D(\alpha) \subseteq D_\alpha$

(2) $f^{-1}(\underset{\sim}{E})_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq f^{-1}(H_E(\alpha)) \subseteq f^{-1}(\underset{\sim}{E})_\alpha, E_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H_E(\alpha) \subseteq E_\alpha$

(3) $f(\underset{\sim}{D})_\alpha = \bigcap\limits_{\lambda < \alpha} f(H_D(\lambda)), \alpha \in (0,1], f(\underset{\sim}{D})_0 = V$

(4) $f(\underset{\sim}{D})_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \bigcup\limits_{\lambda > \alpha} f(H_D(\lambda)) = f(\bigcup\limits_{\lambda > \alpha} H_D(\lambda)) = f(D_{\underset{\cdot}{\alpha}}), \alpha \in [0, 1), f^{-1}(\underset{\sim}{E})_{\underset{\cdot}{1}} = \varnothing = f(\varnothing) = f(D_{\underset{\cdot}{1}})$

(5) $f^{-1}(\underset{\sim}{E})_\alpha = \bigcap\limits_{\lambda < \alpha} f^{-1}(H_E(\lambda)) = f^{-1}(\bigcap\limits_{\lambda < \alpha} H_E(\lambda)) = f^{-1}(E_\alpha), \alpha \in (0,1], f^{-1}(\underset{\sim}{E})_0 = U = f^{-1}(V) = f^{-1}(E_0)$

(6) $f^{-1}(\underset{\sim}{E})_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \bigcap\limits_{\lambda > \alpha} f^{-1}(H_E(\lambda)) = f^{-1}(\bigcup\limits_{\lambda > \alpha} H_E(\lambda)) = f^{-1}(E_{\underset{\cdot}{\alpha}}), \alpha \in [0,1), f^{-1}(\underset{\sim}{E})_{\underset{\cdot}{1}} = \varnothing = f^{-1}(\varnothing) = f^{-1}(\underset{\sim}{E_{\underset{\cdot}{1}}})$

(4)～(6)指出：

$f(\underset{\sim}{D})_{\underset{\cdot}{\alpha}} = f(D_{\underset{\cdot}{\alpha}})$

$$f^{-1}(\underset{\sim}{E})_\alpha = f^{-1}(E_\alpha)$$

$$f^{-1}(\underset{\sim}{E})_{\underset{\cdot}{\alpha}} = f^{-1}(E_{\underset{\cdot}{\alpha}})$$

但是,一般地,$f(\underset{\sim}{D})_\alpha \neq f(D_\alpha)$

定理 3.1.12 (复合函数的扩展原理) 设

$U, V, W \subseteq C, f: U \to V, g: V \to W, g \circ f: U \to W$,

$(g \circ f)(z) = g(f(z))$

(1)如果 $\underset{\sim}{D} \in C^F(U)$,则

$$(g \circ f)(\underset{\sim}{D}) = g(f(\underset{\sim}{D})) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha g(f(D_\alpha))$$

(2)如果 $\underset{\sim}{E} \in C^F(W)$,则

$$(g \circ f)^{-1}(\underset{\sim}{E}) = f^{-1}(g^{-1}(\underset{\sim}{E})) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha f^{-1}(g^{-1}(E_\alpha))$$

3.2.5 复模糊集的多元扩展原理

首先,我们引入复模糊集合的笛卡尔积概念。我们知道,普通集合的笛卡尔积是指:$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$

其特征函数

$$(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)$$

将其拓广到复模糊集合 $\underset{\sim}{Z}_1, \cdots, \underset{\sim}{Z}_n$ 的笛卡尔积,我们有

定义 3.2.10 设 $\underset{\sim}{Z}_k = \underset{\sim}{X}_k + i\,\underset{\sim}{Y}_k \in C^F(U_k), U_k \subseteq C, k = 1, 2, \cdots, n$

称 $\underset{\sim}{Z}_1 \times \cdots \times \underset{\sim}{Z}_n \triangleq \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha(Z_{1,\alpha} \times Z_{2,\alpha} \times \cdots \times Z_{n,\alpha})$

$\triangleq (\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha(X_{1,\alpha} \times \cdots \times X_{n,\alpha}) + i\,(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha(Y_{1,\alpha} \times \cdots \times Y_{n,\alpha}))$

为 $\underset{\sim}{Z}_1,\underset{\sim}{Z}_2,\cdots,\underset{\sim}{Z}_n$ 的笛卡尔积。

定义的合理性在于

$$\alpha_1<\alpha_2 \Rightarrow Z_{k,\alpha_1}=X_{k,\alpha_1}+i\ Y_{k,\alpha_1}\supseteq Z_{k,\alpha_2}=X_{k,\alpha_2}+i\ Y_{k,\alpha_2}$$

$$\Rightarrow Z_{1,\alpha_1}\times\cdots\times Z_{n,\alpha_1}\supseteq Z_{1,\alpha_2}\times\cdots\times Z_{n,\alpha_2}$$

于是

$\{Z_{1,\alpha}\times\cdots\times Z_{n,\alpha}=X_{1,\alpha}\times\cdots\times X_{n,\alpha}+\ i(Y_{1,\alpha}\times\cdots\times Y_{n,\alpha})\mid \alpha\in[0,1]\}$ 构成 $U=U_1\times\cdots\times U_n\subseteq C^n$ 上的一个复集合套。由复模糊集合的表现定理知,它惟一确定一个复模糊集合

$$\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha(Z_{1,\alpha}\times\cdots\times Z_{n,\alpha})\in C^F(U_1\times\cdots\times U_n)$$

并且满足:

$$(\underset{\sim}{Z}_1\times\cdots\times\underset{\sim}{Z}_n)_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq \underset{\sim}{Z}_{1,\alpha}\times\cdots\times\underset{\sim}{Z}_{n,\alpha}\subseteq(\underset{\sim}{Z}_1\times\cdots\times\underset{\sim}{Z}_n)_\alpha$$

$$(\underset{\sim}{Z}_1\times\cdots\times\underset{\sim}{Z}_n)_\alpha=\bigcap_{\lambda<\alpha}Z_{1,\underset{\cdot}{\lambda}}\times\cdots\times Z_{n,\underset{\cdot}{\lambda}},\alpha\in(0,1]$$

$$(\underset{\sim}{Z}_1\times\cdots\times\underset{\sim}{Z}_n)_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\bigcup_{\lambda>\alpha}Z_{1,\lambda}\times\cdots\times Z_{n,\lambda},\alpha\in[0,1)$$

定理 3.2.13 设 $\underset{\sim}{Z}_k=\underset{\sim}{X}_k+i\ \underset{\sim}{Y}_k\in C^F(U_k),k=1,2,\cdots,n$,对 $\forall(z_1,z_2,\cdots,z_n)=(x_1+\ iy_1,x_2+iy_2,\cdots,x_n+iy_n)\in U_1\times U_2\times\cdots\times U_n\subseteq C^n$,有

$(\underset{\sim}{Z}_1\times\underset{\sim}{Z}_2\times\cdots\times\underset{\sim}{Z}_n)(z_1,z_2,\cdots,z_n)=(\underset{\sim}{X}_1\times\underset{\sim}{X}_2\times\cdots\times\underset{\sim}{X}_n+i\ \underset{\sim}{Y}_1\times\underset{\sim}{Y}_2\times\cdots\times\underset{\sim}{Y}_n)(x_1+iy_1,x_2+iy_2,\cdots,x_n+iy_n)=(\bigwedge_{k=1}^{n}\underset{\sim}{X}_k(x_k))\wedge(\bigwedge_{k=1}^{n}\underset{\sim}{Y}_k(y_k))$

$$=\bigwedge_{k=1}^{n}\underset{\sim}{Z}_k(z_k)$$

定理 3.2.14 (1)$(\underset{\sim}{Z}_1\times\cdots\times\underset{\sim}{Z}_n)_\alpha=Z_{1,\alpha}\times\cdots\times Z_{n,\alpha}$

(2)$(\underset{\sim}{Z}_1\times\cdots\times\underset{\sim}{Z}_n)_{\underset{\cdot}{\alpha}}=Z_{1,\underset{\cdot}{\alpha}}\times\cdots\times Z_{n,\underset{\cdot}{\alpha}}$

复模糊集合的多元扩展原理

设 $\underset{\sim}{Z}_k \in C^F(U_k), U_k \subseteq C, k=1,2,\cdots,n$,则笛卡尔积可看作一个映照:

$$\times: C^F(U_1)\times\cdots\times C^F(U_n)\to C^F(U_1\times\cdots\times U_n),$$

$$(\underset{\sim}{Z}_1,\cdots,\underset{\sim}{Z}_n)\to \underset{\sim}{Z}_1\times\cdots\times\underset{\sim}{Z}_n$$

设 $U=U_1\times\cdots\times U_n\subseteq C^n, V=V_1\times\cdots\times V_m\subseteq C^m,$

$$f: U=U_1\times\cdots\times U_n\to V=V_1\times\cdots\times V_m,$$

$$(z_1\cdots,z_n)\to f(z_1,\cdots,z_n)=w=(w_1,\cdots,w_m)$$

$$=(u_1+iv_1,\cdots,u_m+iv_m)$$

根据复模糊集合的扩展原理,f 可诱导出

$$f: C^F(U)\to C^F(V),$$

$$\underset{\sim}{D}\to f(\underset{\sim}{D})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(D_\alpha)$$

$$f^{\ 1}: C^F(V)\to C^F(U),$$

$$\underset{\sim}{E}\to f^{-1}(\underset{\sim}{E})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f^{-1}(E_\alpha)$$

将它们分别与下列两种笛卡尔积复合

$$\times_1: C^F(U_1)\times\cdots\times C^F(U_n)\to C^F(U_1\times\cdots\times U_n)$$

$$(\underset{\sim}{Z}_1,\cdots,\underset{\sim}{Z}_n)\to\underset{\sim}{Z}_1\times\cdots\times\underset{\sim}{Z}_n,$$

$$\times_2: C^F(V_1)\times\cdots\times C^F(V_m)\to C^F(V_1\times\cdots\times V_m)$$

$$(\underset{\sim}{E}_1,\cdots,\underset{\sim}{E}_m)\to\underset{\sim}{E}_1\times\cdots\times\underset{\sim}{E}_m$$

便可得到复模糊集合的多元扩展原理。

定义 3.2.11 (复模糊集合的多元扩展原理) 设

$$U=U_1\times\cdots\times U_n\subseteq C^n, V=V_1\times\cdots\times V_m\subseteq C^m,$$

$$f: U_1\times\cdots\times U_n\to V_1\times\cdots\times V_m,$$

$$(z_1,\cdots,z_n)\to f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$$
$$=(u_1+iv_1,\cdots,u_m+iv_m)$$

则 f 可诱导出：

$$f:C^F(U_1)\times\cdots\times C^F(U_n)\to C^F(V_1\times\cdots\times V_m)$$
$$(\underset{\sim}{D}_1,\cdots,\underset{\sim}{D}_n)\to f(\underset{\sim}{D}_1,\cdots,\underset{\sim}{D}_n)\triangleq f(\underset{\sim}{D}_1\times\cdots\times\underset{\sim}{D}_n)$$
$$f^{-1}:C^F(V_1)\times\cdots\times C^F(V_m)\to C^F(U_1\times\cdots\times U_n),$$
$$(\underset{\sim}{E}_1,\cdots,\underset{\sim}{E}_m)\to f^{-1}(\underset{\sim}{E}_1,\cdots,\underset{\sim}{E}_m)\triangleq f^{-1}(\underset{\sim}{E}_1\times\cdots\times\underset{\sim}{E}_m)$$

由前面有关定理易得：

定理 3.2.15　设 $\underset{\sim}{D}_k=\underset{\sim}{D}_{k1}+i\,\underset{\sim}{D}_{k2}\in C^F(U_k),k=1,2,\cdots,n$

$\underset{\sim}{E}_j=\underset{\sim}{E}_{j1}+i\,\underset{\sim}{E}_{j2}\in C^F(V_j),j=1,2,\cdots,m,$

$z=(z_1,\cdots,z_n)=(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)\in U_1\times\cdots\times U_n\subseteq C^n$

$w=(w_1,\cdots,w_m)=(u_1+iv_1,\cdots,u_m+iv_m)\in V_1\times\cdots\times V_m\subseteq C^m$

则

$$f(\underset{\sim}{D}_1,\cdots,\underset{\sim}{D}_n)(w)=\bigvee_{f(z_1,\cdots,z_n)=w}\left(\bigwedge_{k=1}^{n}\underset{\sim}{D}_k(z_k)\right)$$
$$=\left(\bigvee_{f(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)=w}\left(\bigwedge_{k=1}^{n}\underset{\sim}{D}_{k1}(x_k)\right)\right.$$
$$\left.\wedge\left(\bigvee_{f(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)=w}\left(\bigwedge_{k=1}^{n}\underset{\sim}{D}_{k2}(y_k)\right)\right)\right)$$
$$f^{-1}(\underset{\sim}{E}_1,\cdots,\underset{\sim}{E}_m)(z)=\bigwedge_{j=1}^{m}\underset{\sim}{E}_j(w_j)$$
$$=\left(\bigwedge_{j=1}^{m}\underset{\sim}{E}_{j1}(u_j)\right)\wedge\left(\bigwedge_{j=1}^{m}\underset{\sim}{E}_{j2}(v_j)\right)$$

复模糊集合的多元扩展原理也可采用下列形式

定理 3.2.16 （复模糊集合的多元扩展原理Ⅰ）

$$f(\underset{\sim}{D}_1,\cdots,\underset{\sim}{D}_n)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(D_{1,\alpha},\cdots,D_{n,\alpha})$$

$$f^{-1}(\underset{\sim}{E}_1,\cdots,\underset{\sim}{E}_m)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f^{-1}(E_{1,\alpha},\cdots,E_{m,\alpha})$$

定理 3.2.17 （复模糊集合的多元扩展原理Ⅱ）

$$f(\underset{\sim}{D}_1,\cdots,\underset{\sim}{D}_n)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(D_{1,\underset{\cdot}{\alpha}},\cdots,D_{n,\underset{\cdot}{\alpha}})$$

$$f^{-1}(\underset{\sim}{E}_1,\cdots,\underset{\sim}{E}_m)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f^{-1}(E_{1,\underset{\cdot}{\alpha}},\cdots,E_{m,\underset{\cdot}{\alpha}})$$

定理 3.2.18 （复模糊集合的多元扩展原理Ⅲ）

$$f(\underset{\sim}{D}_1,\cdots,\underset{\sim}{D}_n)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(H_{D_1}(\alpha),\cdots,H_{D_n}(\alpha))$$

其中 $D_{k,\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq H_{D_k}(\alpha)\subseteq D_{k,\alpha},k=1,2,\cdots,n$

$$f^{-1}(\underset{\sim}{E}_1,\cdots,\underset{\sim}{E}_m)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f^{-1}(H_{E_1}(\alpha),\cdots,H_{E_m}(\alpha))$$

其中 $E_{j,\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq H_{E_j}(\alpha)\subseteq E_{j,\alpha},j=1,2,\cdots,m$

3.2.6 复模糊数及其运算

(一)闭凸复模糊集

定义 3.2.12 设 R 为实数域，C 为复数域，对 $\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}\in F(R)$

称 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\,\underset{\sim}{Y}\in C^F(C)$ 为 C 上凸复模糊集合当且仅当

对 $\forall\,\alpha\in(0,1],Z_\alpha=X_\alpha+i\,Y_\alpha$ 是 C 上的凸复集，

即 X_α 和 Y_α 均是 R 上的凸集。

称 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\,\underset{\sim}{Y}$ 为 C 上的闭复模糊集当且仅当

对 $\forall\,\alpha\in(0,1],Z_\alpha=X_\alpha+i\,Y_\alpha$ 是 C 上的闭集，即 X_α 和 Y_α 均是 R 上的闭集。

如果 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\,\underset{\sim}{Y}$ 有界，则 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\,\underset{\sim}{Y}$ 称为闭凸复模糊集当且仅当

对 $\forall\,\alpha\in(0,1],Z_\alpha=X_\alpha+i\,Y_\alpha$ 是闭复区间数，即 $X_\alpha,Y_\alpha\in I$

$(R)=\{[x\ \ ,x^{+}]\mid x\ \ ,x^{+}\in R,x\ \ \leqslant x^{+}\}$是有界闭区间数。约定空集$\varnothing$为 C 上的闭复区间数。

定理 3.2.19　$\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\underset{\sim}{Y}$ 是C 上的凸复模糊集当且仅当

$$\underset{\sim}{Z}(kz_2+(1-k)z_1)\geqslant\underset{\sim}{Z}(z_1)\wedge\underset{\sim}{Z}(z_2)$$

其中 $k\in[0,1]$，$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2\in C$

如果 $Z_\alpha=\varnothing$，则约定 Z_α 为凸集。即 $\underset{\sim}{Z}$ 为凸复模糊集。

(二)复模糊数(*Complex Fuzzy numbers*)

定义 3.2.13　设 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\underset{\sim}{Y}\in C^F(C)$，称其为正规复模糊集当且仅当

$$\{z=x+iy\in C\mid\underset{\sim}{Z}(z)=\underset{\sim}{X}(x)\wedge\underset{\sim}{Y}(y)=1\}\neq\varnothing$$

定义 3.2.14　设 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\underset{\sim}{Y}\in C^F(C)$，如果 $supp\ \underset{\sim}{Z}=supp\ \underset{\sim}{X}+i\ supp\ \underset{\sim}{Y}$ 为有界集，则称 $\underset{\sim}{Z}$ 为有限复模糊集；如果对 $\forall\alpha(0,1]$，$Z_\alpha=X_\alpha+iY_\alpha$ 为有界复集，则称 $\underset{\sim}{Z}$ 为有界复模糊集。

定义 3.2.15　复数域 C 上的正规凸复模糊集$\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\underset{\sim}{Y}$ 称为一个复模糊数；

正规闭凸复模糊集 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\underset{\sim}{Y}$ 称为闭复模糊数；正规有界闭凸复模糊集 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\underset{\sim}{Y}$ 和正规有限闭凸复模糊集统称为有界闭复模糊数。

因为有界闭复模糊数的 α 水平集 $Z_\alpha=X_\alpha+iY_\alpha(\alpha\in(0,1])$ 是闭复区间数，所以运算较为方便，下面介绍有界闭复模糊数及其运算。

用　$C_0^F(C)$表示复数域 C 上有界闭复模糊数之全体，即

$$C_0^F(C)=\{\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\underset{\sim}{Y}\mid\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}\in F_0(R)\}$$

定理 3.2.20 （有界闭复 F 数的表现定理）设

$$H:(0,1]\to I(C)=\{Z=X+iY\mid X,Y\in I(R)\},$$

$$\alpha\to H(\alpha)=[X_\alpha^-,X_\alpha^+]+i[Y_\alpha^-,Y_\alpha^+]\neq\varnothing$$

满足条件

$$\alpha_1<\alpha_2\Rightarrow[X_{\alpha_1}^-,X_{\alpha_1}^+]+i[Y_{\alpha_1}^-,Y_{\alpha_1}^+]$$

$$\supseteq[X_{\alpha_2}^-,X_{\alpha_2}^+]+i[Y_{\alpha_2}^-,Y_{\alpha_2}^+]$$

则

(1) $\underset{\sim}{Z}=\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]}\alpha H(\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]}\alpha[X_\alpha^-,X_\alpha^+]+i\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]}\alpha[Y_\alpha^-,Y_\alpha^+]\in C_0^F(C)$；

(2) $Z_\alpha=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}H(\alpha_n)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[X_{\alpha_n}^-,X_{\alpha_n}^+]+i\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[Y_{\alpha_n}^-,Y_{\alpha_n}^+]$

其中 $\alpha\in(0,1],\alpha_n=(1-\frac{1}{n+1})\alpha$

（二）有界闭复模糊数的运算

复模糊集合的扩展原理可以将复数的代数运算扩展成复数域 C 上的复模糊集之间的相应代数运算。

设 $*$ 是复数域上的代数运算

$$*:C\times C\to C,(z_1,z_2)\to w=z_1*z_2$$

根据复模糊集的多元扩展原理，我们有复模糊集间的运算

$$*:C^F(C)\times C^F(C)\to C^F(C)$$

$$(\underset{\sim}{E},\underset{\sim}{D})\to\underset{\sim}{E}*\underset{\sim}{D}=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha(E_\alpha*D_\alpha)$$

其中 $E_\alpha*D_\alpha=\{w\mid\exists(z_1,z_2)\in E_\alpha\times D_\alpha,z_1*z_2=w\}$

$$(\underset{\sim}{E}*\underset{\sim}{D})(w)=\bigvee_{z_1*z_2=w}(\underset{\sim}{E}(z_1)\wedge\underset{\sim}{D}(z_2))$$

对于 +、−、·、÷ 四则运算，我们有

$$(\underset{\sim}{E}+\underset{\sim}{D})(w)=\bigvee_{z_1+z_2=w}(\underset{\sim}{E}(z_1)\wedge\underset{\sim}{D}(z_2))$$

$$=\bigvee_{z_1\in C}(\underset{\sim}{E}(z_1)\wedge\underset{\sim}{D}(w-z_1))$$

$$(\underset{\sim}{E}-\underset{\sim}{D})(w)=\bigvee_{z_1-z_2=w}(\underset{\sim}{E}(z_1)\wedge\underset{\sim}{D}(z_2))$$

$$=\bigvee_{z_1\in C}(\underset{\sim}{E}(z_1)\wedge\underset{\sim}{D}(z_1-w))$$

$$(\underset{\sim}{E}\cdot\underset{\sim}{D})(w)=\bigvee_{z_1\cdot z_2=w}(\underset{\sim}{E}(z_1)\wedge\underset{\sim}{D}(z_2))$$

$$(\underset{\sim}{E}/\underset{\sim}{D})(w)=\bigvee_{z_1/z_2=w}(\underset{\sim}{E}(z_1)\wedge\underset{\sim}{D}(z_2))$$

定理 3.2.21　设 $w=f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$为 n 元连续复函数，$Z_k\in C_0^F(C)$ 为有界闭复 F 数 $(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$f(\underset{\sim}{Z_1},\underset{\sim}{Z_2},\cdots,\underset{\sim}{Z_n})_\alpha=f(Z_{1,\alpha},Z_{2,\alpha},\cdots,Z_{n,\alpha}),\alpha\in(0,1]$$

定理 3.2.22　设$\underset{\sim}{Z_1}=\underset{\sim}{X_1}+i\,\underset{\sim}{Y_1},\underset{\sim}{Z_2}=\underset{\sim}{X_2}+i\,\underset{\sim}{Y_2}\in C_0^F(C)$为有界闭复 F 数，则对$\forall\,\alpha(0,1]$，

(1)$(\underset{\sim}{Z_1}\pm\underset{\sim}{Z_2})_\alpha=Z_{1,\alpha}\pm Z_{2,\alpha}$;

(2)$(\underset{\sim}{Z_1}\cdot\underset{\sim}{Z_2})_\alpha=Z_{1,\alpha}\cdot Z_{2,\alpha}$;

(3)$(\underset{\sim}{Z_1}/\underset{\sim}{Z_2})_\alpha=Z_{1,\alpha}/Z_{2,\alpha}$;

(4)$(k\,\underset{\sim}{Z_1})_\alpha=kZ_{1,\alpha},k\in C$

由于有界闭复 F 数运算具有上述 α 水平复集公式，所以给复 F 数附加上“有界”与“闭”的条件能提供许多优越性，这尤其是在应用方面特别方便。

(四)有界闭复模糊数的分析运算

运用复模糊集的扩展原理，我们来定义有界闭复模糊数序列的上确界、下确界，上、下极限及极限。

定义 3.2.16 设$\{\underset{\sim}{Z}_n=\underset{\sim}{X}_n+i\underset{\sim}{Y}_n, n\geqslant 1\}\subseteq C_0^F(C)$是一有界闭复 F 数序列，则$\{\underset{\sim}{Z}_n=\underset{\sim}{X}_n+i\underset{\sim}{Y}_n\}$的上、下确界定义为：对$\forall z=x+iy\in C$

$$\underset{k\geqslant n}{Sup}\underset{\sim}{Z}_k:(\underset{k\geqslant n}{Sup}\underset{\sim}{Z}_k)(z)\triangleq(\underset{k\geqslant n}{Sup}\underset{\sim}{X}_k)(x)+i(\underset{k\geqslant n}{Sup}\underset{\sim}{Y}_k)(y)$$

$$\underset{k\geqslant n}{inf}\underset{\sim}{Z}_k:(\underset{k\geqslant n}{inf}\underset{\sim}{Z}_k)(z)\triangleq(\underset{k\geqslant n}{inf}\underset{\sim}{X}_k)(x)+i(\underset{k\geqslant n}{inf}\underset{\sim}{Y}_k)(y)$$

定义 3.2.17 设$\{\underset{\sim}{Z}_n=\underset{\sim}{X}_n+i\underset{\sim}{Y}_n\}\subseteq C_0^F(C)$是一有界闭复 F 数序列，则$\{\underset{\sim}{Z}_n=\underset{\sim}{X}_n+i\underset{\sim}{Y}_n\}$的上、下极限定义为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\underset{\sim}{Z}_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\underset{\sim}{X}_n+i\overline{\lim_{n\to\infty}}\underset{\sim}{Y}_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\underset{\sim}{Z}_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\underset{\sim}{X}_n+i\underline{\lim_{n\to\infty}}\underset{\sim}{Y}_n$$

定义 3.2.18 序列$\{\underset{\sim}{Z}_n=\underset{\sim}{X}_n+i\underset{\sim}{Y}_n\}\subseteq C_0^F(C)$称为收敛的，如果序列$\{\underset{\sim}{X}_n, n\geqslant 1\}$，$\{\underset{\sim}{Y}_n, n\geqslant 1\}\subseteq F_0(R)$均收敛，即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\underset{\sim}{X}_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\underset{\sim}{X}_n=\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{X}_n,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\underset{\sim}{Y}_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\underset{\sim}{Y}_n=\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{Y}_n,$$

此时，称$\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{X}_n+i\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{Y}_n=\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{Z}_n$为序列$\{\underset{\sim}{Z}_n=\underset{\sim}{X}_n+i\underset{\sim}{Y}_n, n\geqslant 1\}$的极限。

设$\{\underset{\sim}{Z}_n=\underset{\sim}{X}_n+i\underset{\sim}{Y}_n, n\geqslant 1\}\subseteq C_0^F(C)$是一有界闭复 F 数序列，则易知：$\forall\alpha\in(0,1]$，$\forall n=1,2,\cdots$

$$Z_{n,\alpha}=X_{n,\alpha}+iY_{n,\alpha}=[X_{n,\alpha}^-,X_{n,\alpha}^+]+i[Y_{n,\alpha}^-,Y_{n,\alpha}^+]$$

其中 $X_{n,\alpha}^-=infX_{n,\alpha}=inf\{x\in R\mid\underset{\sim}{X}_n(x)\geqslant\alpha\}$

$X_{n,\alpha}^+=supX_{n,\alpha}=sup\{x\in R\mid\underset{\sim}{X}_n(x)\geqslant\alpha\}$

$Y_{n,\alpha}^-=infY_{n,\alpha}=inf\{y\in R\mid\underset{\sim}{Y}_n(y)\geqslant\alpha\}$

$$Y^+_{n,\alpha} = supY_{n,\alpha} = sup\{y \in R \mid \underset{\sim}{Y_n}(y) \geqslant \alpha\}$$

定理 3.2.23　设$\{\underset{\sim}{Z_n} = \underset{\sim}{X_n} + i\,\underset{\sim}{Y_n}, n \geqslant 1\} \subseteq C_0^F(C)$是一有界闭复模糊数序列，如果对$\forall\,\alpha \in (0,1]$，序列$\{X^-_{n,\alpha}, n \geqslant 1\}$，$\{X^+_{n,\alpha}, n \geqslant 1\}$，$\{Y_{n,\alpha}, n \geqslant 1\}$和$\{Y^+_{n,\alpha}, n \geqslant 1\}$同时收敛，则序列$\{\underset{\sim}{Z_n} = \underset{\sim}{X_n} + i\,\underset{\sim}{Y_n}, n \geqslant 1\}$也收敛。

推论 3.2.24　如果用(0,1]中的有理点集 Q 来代换(0,1]，则上述定理亦然。

3.2.7　圆楔形复模糊数及其运算

关于复模糊数 $\underset{\sim}{Z}$，前面所讨论的形式相当于普通复数的代数形式，而关于指数形式，下面给出圆楔形复模糊数及其运算。

(一)圆楔形闭复区间数及其运算

定义 3.2.19　设 C 为复数域，对于任意正闭区间数 $R = [R^-, R^+] \subseteq [0,\infty)$，$\Theta = [\Theta^-, \Theta^+] \subseteq [0, 2\pi]$，称复有界闭集

$$Z = Rexp\{i\Theta\} \triangleq \{re^{i\theta} \in C \mid r \in R, \theta \in \Theta\}$$

为闭复区间数

显然 $Z = Rexp\{i\Theta\}$定义了复平面 C 上的一个圆楔形，因此，也称 $Z = Rexp\{i\Theta\}$为圆楔形闭复区间数。全体圆楔形闭复区间数组成的集合记为 $I_1(C)$。

定理 3.2.25　设$Z = Rexp\{i\Theta\} \in I_1(C)$。则有

$$Z = Rexp\{i\Theta\} \subseteq Rcos\Theta + iRsin\Theta$$

定义 3.2.20　设 $Z = Rexp\{i\Theta\} \in I_1(C)$，则称

$$Z^* = \{\overline{z} = re^{-i\theta} \mid r \in R, \theta \in \Theta\}$$

为 Z 的共轭圆楔形闭复区间数。称

$$|Z| = R$$

为 Z 的模。

定理 3.2.26　设 $Z = Rexp\{i\Theta\}, Z_k = R_k exp\{i\Theta_k\} \in I_1(C)$, $k = 1,2$,则

(1)$Z^* = Rexp\{i(-\Theta)\}$;

(2)$Z_1 Z_2 = R_1 R_2 exp\{i(\Theta_1 + \Theta_2)\}$;

(3)$|Z_1 Z_2| = R_1 R_2$;

(4)$Z_1 / Z_2 = \frac{R_1}{R_2} exp\{i(\Theta_1 - \Theta_2)\}$;

(5)$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} exp\{i(-\Theta)\}$

(二)圆楔形闭复模糊数及其运算

定义 3.2.21　设 $\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{\Theta} \in F_0(R^+)$为正实有界闭 F 数,$supp\ \underset{\sim}{\Theta}$ 的宽度 $W(supp\ \underset{\sim}{\Theta}) < 2\pi$,则称

$$\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{R} exp\{i\ \underset{\sim}{\Theta}\}$$

为圆楔形复 F 数。对 $\forall z = re^{i\theta} \in C$,称

$$\underset{\sim}{Z}(z) = \underset{\sim}{R}(r) exp\{i\ \underset{\sim}{\Theta}(\theta)\} = \underset{\sim}{R}(r) \wedge \underset{\sim}{\Theta}(\theta)$$

为 $z = re^{i\theta}$相对于复 F 数$\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{R} exp\{i\ \underset{\sim}{\Theta}\}$的隶属程度。称 $\underset{\sim}{Z}(\cdot)$为复 F 数$\underset{\sim}{Z}$ 的隶属函数。

用 $CF_0^*(C)$表示复数域 C 上圆楔形复 F 数的全体,即

$$CF_0^*(C) = \{\underset{\sim}{R} exp\{i\ \underset{\sim}{\Theta}\} \mid \underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{\Theta} \in F_0(R^+), R^+ = [0, \infty)\}。$$

定理 3.2.27　设 $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{R} exp\{i\ \underset{\sim}{\Theta}\} \in CF_0^*(C)$,则对 $\forall \alpha \in (0, 1]$

$$Z_\alpha = R_\alpha exp\{i\Theta_\alpha\}$$

定理 3.2.28 设 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{R}exp\{i\underset{\sim}{\Theta}\},\underset{\sim}{Z}_j=\underset{\sim}{R}_jexp\{i\underset{\sim}{\Theta}_j\}(j=1,2)$ $\in CF_0^*(C)$,则

(1)$\underset{\sim}{Z}^*=\underset{\sim}{R}exp\{i(-\underset{\sim}{\Theta})\}$;

(2)$|\underset{\sim}{Z}|=\underset{\sim}{R}$;

(3)$\underset{\sim}{Z}_1\underset{\sim}{Z}_2=\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{R}_2exp\{i(\underset{\sim}{\Theta}_1+\underset{\sim}{\Theta}_2)\}$;

(4)$|\underset{\sim}{Z}_1\underset{\sim}{Z}_2|=\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{R}_2$;

(5)$\underset{\sim}{Z}^{-1}=\underset{\sim}{R}^{-1}exp\{i(-\underset{\sim}{\Theta})\}$;

(6)$\underset{\sim}{Z}_1/\underset{\sim}{Z}_2=\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{R}_2^{-1}exp\{i(\underset{\sim}{\Theta}_1-\underset{\sim}{\Theta}_2)\}$;

(7)对 $\forall\alpha\in(0,1]$,$(\underset{\sim}{Z}_1\underset{\sim}{Z}_2)_\alpha=R_{1,\alpha}R_{2,\alpha}exp\{i(\Theta_{1,\alpha}+\Theta_{2,\alpha})\}$

(8)对 $\forall\alpha\in(0,1]$,

$(\underset{\sim}{Z}_1/\underset{\sim}{Z}_2)_\alpha=R_{1,\alpha}R_{2,\alpha}^{-1}exp\{i(\Theta_{1,\alpha}-\Theta_{2,\alpha})\}$.

(三)*Fuzzy* 模闭复 *F* 数及其运算

上面基于复数的复指数形式给出了圆楔形闭复模糊数的定义,但不够完整,因为从映射这个角度来说,只给出一对数(r,θ)就存在一复数 $z=re^{i\theta}$ 与之对应,且 r,θ 的组合是任意的,从模糊数学的主观性来说,我们可以认为

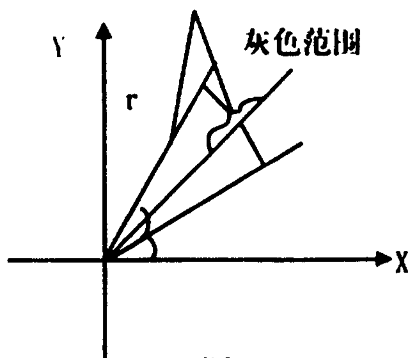


图1

r,θ 的取值之一具有某种模糊性;如图 1 所示,显然,r,θ 的取值

是相互独立的，并不存在彼此之间的制约关系，也就是说 r 取值于某一模糊集合，而 θ 的取值可以是确定的，它们在一起组成的复数是模糊的，相反也成立，即 r 的取值是确定的，而 θ 的取值即是模糊的，它们在一起也构成一复模糊数，显然这种复模糊数有别于前面定义中的圆楔形闭复 F 数，它们具有定向模糊性.

定义 3.2.22　设 C 为复数域，$\underset{\sim}{R}\in F_0(R^+)$ 为正实有界闭 F 数，$\Theta=[\Theta^-,\Theta^+]\subseteq[0,2\pi]$ 为任意正闭区间数，则称 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{R}exp\{i\Theta\}$ 为 Fuzzy 模闭复 F 数，对 $\forall z=re^{i\theta}$，称 $\underset{\sim}{Z}(z)=\underset{\sim}{R}(r)exp\{i\Theta(\theta)\}=R(r)\wedge C_\Theta(\theta)$ 为 $z=re^{i\theta}$ 相对于 Fuzzy 模闭复 F 数 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{R}exp\{i\Theta\}$ 的隶属程度，称 $\underset{\sim}{Z}(\cdot)$ 为复 F 数 $\underset{\sim}{Z}$ 的隶属函数.其中，$C_\Theta(\theta)$ 为 Θ 的特征函数。

定理 3.2.29　设 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{R}exp\{i\,\Theta\}\in CF_0^*(C)$，则对 $\forall\alpha\in(0,1]$

$$Z_\alpha=R_\alpha exp\{i\Theta\},Z_{\underset{\cdot}{\alpha}}=R_{\underset{\cdot}{\alpha}}exp\{i\Theta\}.$$

定理 3.2.30　设 $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{R}exp\{i\Theta\},\underset{\sim}{Z_j}=\underset{\sim}{R_j}\{i\Theta_j\}(j=1,2)\in CF_0^*(C)$，则

(1)$\underset{\sim}{Z}^*=\underset{\sim}{R}exp\{i(-\Theta)\}$；

(2)$|\underset{\sim}{Z}|=\underset{\sim}{R}$；

(3)$\underset{\sim}{Z_1}\,\underset{\sim}{Z_2}=\underset{\sim}{R_1}\underset{\sim}{R_2}exp\{i(\Theta_1+\Theta_2)\}$；

(4)$|\underset{\sim}{Z_1}\,\underset{\sim}{Z_2}|=\underset{\sim}{R_1}\underset{\sim}{R_2}$；

(5)$\underset{\sim}{Z}^{-1}=\underset{\sim}{R}^{-1}exp\{i(-\Theta)\}$；

(6)$\dfrac{\underset{\sim}{Z_1}}{\underset{\sim}{Z_2}}=\dfrac{\underset{\sim}{R_1}}{\underset{\sim}{R_2}}exp\{i(\Theta_1-\Theta_2)\}$；

(7)对 $\forall\alpha\in(0,1]$，$(\underset{\sim}{Z_1}\underset{\sim}{Z_2})_\alpha=R_{1,\alpha}R_{2,\alpha}exp\{i(\Theta_1+\Theta_2)\}$；

(8)对 $\forall \alpha \in (0,1]$，$\frac{\underset{\sim}{Z}_1}{\underset{\sim}{Z}_2} = R_{1,\alpha} R_{2,\alpha}{}^{-1} exp\{i(\Theta_1 - \Theta_2)\}$.

(四)*Fuzzy* 相闭复 *F* 数及其运算

定义 3.2.23 设 C 为复数域，$R = [R\ \ , R^+] \subseteq [0, \infty)$ 为任意正闭区间数，$\underset{\sim}{\Theta} \in F_0(R^+)$ 为正实有界闭 F 数，$supp\ \underset{\sim}{\Theta}$ 的宽度 $W(Supp\ \underset{\sim}{\Theta}) < 2\pi$，则称

$$\underset{\sim}{Z} = Rexp\{i\ \underset{\sim}{\Theta}\}.$$

为 *Fuzzy* 相闭复 *F* 数，对 $\forall z = re^{i\theta} \in C$，称

$$\underset{\sim}{Z}(z) = R(r) exp\{i\ \underset{\sim}{\Theta}(\theta)\} = C_R(r) \wedge \underset{\sim}{\Theta}(\theta).$$

为 $z = re^{i\theta}$ 相对于 *Fuzzy* 模闭复 F 数 $\underset{\sim}{Z} = Rexp\{i\ \underset{\sim}{\Theta}\}$ 的隶属度，称 $\underset{\sim}{Z}(\cdot)$ 为闭复 F 数 $\underset{\sim}{Z}$ 的隶属函数. 其中，$C_R(r)$ 为 R 上的特征函数.

定理 3.2.31 设 $\underset{\sim}{Z} = Rexp\{i\ \underset{\sim}{\Theta}\} \in CF_0^*(C)$，则对 $\forall \alpha \in (0, 1]$，$Z_\alpha = Rexp\{i\Theta_\alpha\}$

定理 3.2.32 设 $\underset{\sim}{Z} = Rexp\{i\ \underset{\sim}{\Theta}\}$，$\underset{\sim}{Z}_j = R_j exp\{i\ \underset{\sim}{\Theta}_j\}\ (j = 1,2) \in CF_0^*(C)$，则

(1)$\underset{\sim}{Z}^* = Rexp\{i(-\underset{\sim}{\Theta})\}$;

(2)$|\underset{\sim}{Z}| = R$;

(3)$\underset{\sim}{Z}_1 \underset{\sim}{Z}_2 = R_1 R_2 exp\{i(\underset{\sim}{\Theta}_1 + \underset{\sim}{\Theta}_2)\}$;

(4)$|\underset{\sim}{Z}_1 \underset{\sim}{Z}_2| = R_1 R_2$;

(5)$\underset{\sim}{Z}^{-1} = R^{-1} exp\{i(-\underset{\sim}{\Theta})\}$;

(6)$\frac{\underset{\sim}{Z}_1}{\underset{\sim}{Z}_2} = \frac{R_1}{R_2} exp\{i(\underset{\sim}{\Theta}_1 - \underset{\sim}{\Theta}_2)\}$;

(7)对 $\forall\ \alpha \in (0,1]$，$(\underset{\sim}{Z_1}\underset{\sim}{Z_2})_\alpha = R_1 R_2 exp\{i(\Theta_{1,\alpha} + \Theta_{2,\alpha})\}$；

(8)对 $\forall\ \alpha \in (0,1]$，$\left(\frac{\underset{\sim}{Z_1}}{Z_2}\right)_\alpha = R_1 R_2{}^{1} exp\{i(\Theta_{1,\alpha} - \Theta_{2,\alpha})\}$.

第四章　模糊复分析基础

§4.1　复模糊集值函数的基本概念与性质

4.1.1　实模糊集值函数及其连续性

定义 4.1　设 Ω 是平面或空间的一个可度量的几何体，若 $\overline{f}$: $\Omega \to \overline{R}$

$$P \mapsto \overline{f}(P) = [f^-(P), f^+(P)] \qquad P \in \Omega$$

则称 $\overline{f}$ 是定义在几何体 Ω 上的区间值函数。

定义 4.2　设 $\overline{f}$ 是定义在几何体 Ω 上的区间值函数，$P_0 \in \Omega$，若 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $P \in U(P_0;\delta) \cap \Omega$ 时，有

$$d(\overline{f}(P), \overline{f}(P_0)) < \varepsilon。$$

其中 $U(P_0;\delta) = \{P \mid \rho(P, P_0) < \delta\}$ 是 P_0 的 δ 邻域，则称区间值函数在点 P_0 处关于 Ω 连续。若 $\overline{f}$ 在 Ω 上每一点都连续，则称 $\overline{f}$ 在几何体 Ω 上连续。

定理 4.1　设 $\overline{f} = [f^-, f^+]$ 是定义在几何体 Ω 上的区间值函数，则 $\overline{f}$ 在几何体 Ω 上连续的充要条件是函数 f^-、f^+ 在 Ω 上连续。

证明：　设 $\overline{f}$ 在几何体 Ω 上连续，$\forall P_0 \in \Omega$，则 $\overline{f}$ 在 P_0 点连续，即 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $P \in U(P_0;\delta) \cap \Omega$ 时，有 $d(\overline{f}(P), \overline{f}(P_0)) < \varepsilon$，即

$$|f^-(P)-f^-(P_0)| \vee |f^+(P)-f^+(P_0)|<\varepsilon。$$

所以，$|f^-(P)-f^-(P_0)|<\varepsilon$，$|f^+(P)-f^+(P_0)|<\varepsilon$，所以 f^+、f^- 在 P_0 点连续，从而 f^-、f^+ 在 Ω 上连续。

若 f^-、f^+ 在 Ω 上连续，$\forall P_0 \in \Omega$ 则 f^-，f^+ 在 P_0 点连续，即 $\forall \varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $P \in U(P_0;\delta) \cap \Omega$ 时，有 $|f^-(P)-f^-(P_0)|<\varepsilon$，$|f^+(P)-f^+(P_0)|<\varepsilon$，所以

$$d(\overline{f}(P),\overline{f}(P_0))=|f^-(P)-f^-(P_0)| \vee |f^+(P)-f^+(P_0)|<\varepsilon。$$

所以，区间值函数在 P_0 点连续，从而 $\overline{f}$ 在 Ω 上连续。证毕。

定义 4.3 (1)设 Ω 是平面或空间可度量的几何体。

$$\tilde{f}:\Omega \to \tilde{R}$$

$$P \mapsto \tilde{f}(P)$$

则称 $\tilde{f}$ 为定义在几何体 Ω 上的 $Fuzzy$ 值函数，简称 F 函数。

(2)设 $f_\lambda:\Omega \to \overline{R}$

$$P \mapsto f_\lambda(P) \triangleq (\tilde{f}(P))_\lambda \triangleq [f_\lambda^-(P),f_\lambda^+(P)].$$

则称 f_λ 为 F 函数 $\tilde{f}$ 的 λ－截函数，它是定义在 Ω 上的区间值函数，由分解定理，$\forall P \in \Omega$.

$$\tilde{f}(P) \triangleq \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda f_\lambda(P) \triangleq \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda [f_\lambda(P), f_\lambda^+(P)].$$

定义 4.4 设$\tilde{f}$是定义在几何体Ω上的F函数，若$\forall \lambda \in (0,1]$，$\tilde{f}$的$\lambda$截函数$f_\lambda$在$\Omega$上连续，则称$F$函数$\tilde{f}$在$\Omega$上分层连续，简称$F$函数$\tilde{f}$在$\Omega$上连续。

4.1.2 复模糊集值函数的基本概念

定义 4.5 设U是论域，R是实数域，C是复数域。称$\underset{\sim}{A}: T \to F_0(R), t \to \underset{\sim}{A}(t)$
为定义在T上的实模糊集值函数；称

$$\underset{\sim}{Z}: T \to C_0^F(C), t \to \underset{\sim}{Z}(t) = \underset{\sim}{X}(t) + i\,\underset{\sim}{Y}(t)$$

为定义在T上的复模糊集值函数。

定义 4.6 设$T \subseteq R$ 称

$$f: T \to I(R) = \{[x,y] \mid x, y \in R, x \leqslant y\}$$

$$t \to f(t) = [f^-(t), f^+(t)]$$

为定义在T上的区间值函数，其中$f^-(t)$，$f^+(t)$均是T上的实函数。

如果$f^-(t)$，$f^+(t)$是T上的连续函数，则称

$$f(t)=[f^-(t),f^+(t)]$$

是 T 上的连续区间值函数。

设 $f(t)=g(t)+ih(t),t\in T$.如果 $g(t),h(t)$都是 T 上的区间值函数,则称 $f(t)$为 T 上的复区间值函数。

如果 $g(t),h(t)$都是 T 上的连续区间值实函数,则称

$$f(t)=g(t)+ih(t)$$

是 T 上的连续复区间值函数。

定义 4.7 (1)设 $\underset{\sim}{f}(t)$为 $T\subseteq R$ 上的模糊集值函数,称

$$f_\alpha:T\to I(R),t\to f_\alpha(t)\triangleq(\underset{\sim}{f}(t))_\alpha,\quad\alpha\in(0,1]$$

为 $\underset{\sim}{f}$ 的 α 水平函数。

(2)设 $\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\underset{\sim}{g}(t)$为 T 上的复模糊集值函数,称

$$f_\alpha:T\to I(C),\quad t\to f_\alpha(t)\triangleq h_\alpha(t)+ig_\alpha(t)$$

$$\triangleq(\underset{\sim}{h}(t)+i\,\underset{\sim}{g}(t))_\alpha,\quad\alpha\in(0,1]$$

为 $\underset{\sim}{f}$ 的 α 水平复函数。

定理 4.2 (1)$\underset{\sim}{f}(t)$是 T 上的模糊集值函数的充分必要条件是对$\forall\alpha\in(0,1]$,$\underset{\sim}{f}(t)$的 α 水平函数

$$f_\alpha(t)=[f_\alpha^-(t),f_\alpha^+(t)]\tag{4.1.1}$$

为 T 上的区间值函数,并且

$$\underset{\sim}{f}(t)=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[f_\alpha^-(t),f_\alpha^+(t)] \tag{4.1.2}$$

其中

$$f_\alpha^-(t)=\inf f_\alpha(t)=\inf\{x\in R\mid \underset{\sim}{f}(t)(x)\geqslant\alpha\} \tag{4.1.3}$$

$$f_\alpha^+(t)=\sup f_\alpha(t)=\sup\{x\in R\mid \underset{\sim}{f}(t)(x)\geqslant\alpha\} \tag{4.1.4}$$

(2) $\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\underset{\sim}{g}(t)$ 为 T 上的复模糊集值函数的充分必要条件是对 $\forall\alpha\in(0,1]$,$\underset{\sim}{f}(t)$ 的 α 水平复函数

$$\begin{aligned}f_\alpha(t)&=h_\alpha(t)+ig_\alpha(t)\\&=[h_\alpha^-(t),h_\alpha^+(t)]+i[g_\alpha^-(t),g_\alpha^+(t)]\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

为 T 上的复区间值函数,并且

$$\underset{\sim}{f}(t)=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[h_\alpha^-(t),h_\alpha^+(t)]+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[g_\alpha^-(t),g_\alpha^+(t)] \tag{4.1.6}$$

其中

$$h_\alpha^-(t)=\inf h_\alpha(t)=\inf\{x\in R\mid \underset{\sim}{h}(t)(x)\geqslant\alpha\} \tag{4.1.7}$$

$$h_\alpha^+(t)=\sup h_\alpha(t)=\sup\{x\in R\mid \underset{\sim}{h}(t)(x)\geqslant\alpha\} \tag{4.1.8}$$

$$g_\alpha^-(t)=\inf g_\alpha(t)=\inf\{y\in R\mid \underset{\sim}{g}(t)(y)\geqslant\alpha\} \tag{4.1.9}$$

$$g_\alpha^+(t)=\sup g_\alpha(t)=\sup\{y\in R\mid \underset{\sim}{g}(t)(y)\geqslant\alpha\} \tag{4.1.10}$$

定理 4.3 设 $\underset{\sim}{A}(t),\underset{\sim}{B}(t)$ 是 T 上的实(复)模糊集值函数,令

$(\underset{\sim}{A}\pm\underset{\sim}{B})(t)\triangleq\underset{\sim}{A}(t)\pm\underset{\sim}{B}(t)$,

$(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B})(t)\triangleq\underset{\sim}{A}(t)\cdot\underset{\sim}{B}(t)$,

$(\underset{\sim}{A}/\underset{\sim}{B})(t)\triangleq\underset{\sim}{A}(t)/\underset{\sim}{B}(t)$,

$(k\underset{\sim}{A})(t)\triangleq k\underset{\sim}{A}(t),k\in R$(或 C)

则对$\forall \alpha \in (0,1]$,有

$$(\underset{\sim}{A} \pm \underset{\sim}{B})_\alpha(t) = A_\alpha(t) \pm B_\alpha(t),$$

$$(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B})_\alpha(t) = A_\alpha(t) \cdot B_\alpha(t),$$

$$(\underset{\sim}{A} / \underset{\sim}{B})_\alpha(t) = A_\alpha(t) / B_\alpha(t),$$

$$(k\,\underset{\sim}{A})_\alpha(t) = k\,A_\alpha(t)$$

§4.2　复模糊集值函数的微分

4.2.1　一元复区间值函数的导数

定义 4.8　(1)设$f(t)=[f^-(t),f^+(t)]$是$T \subseteq R$上的区间值函数,如果$f^-(t),f^+(t)$在点$t_0 \in T$的导数$f^{-\prime}(t_0),f^{+\prime}(t_0)$存在,则称$f(t)$在点$t_0$可导,$f(t)$在$t_0$的导数定义为

$$f'(t_0) \triangleq [\min(f^{-\prime}(t_0),f^{+\prime}(t_0)),\max(f^{-\prime}(t_0),f^{+\prime}(t_0))] \tag{4.2.1}$$

如果$f^{-\prime}(t_0) \leqslant f^{+\prime}(t_0)$,则称$f(t)$在$t_0$同序可导,$f(t)$在$t_0$的同序导数为

$$f'(t_0) = [f^{-\prime}(t_0),f^{+\prime}(t_0)] \tag{4.2.2}$$

如果$f^{-\prime}(t_0) \geqslant f^{+\prime}(t_0)$,则称$f(t)$在$t_0$反序可导,其在$t_0$的反序导数为

$$f'(t_0) = [f^{+\prime}(t_0),f^{-\prime}(t_0)] \tag{4.2.3}$$

如果对$\forall t \in T$,$f^{-\prime}(t),f^{+\prime}(t)$都存在,则称

$$F(t) \triangleq f'(t)$$

$$\triangleq [\min(f^{\ \prime}(t),f^{+\prime}(t)),\max(f^{-\prime}(t),f^{+\prime}(t))]$$

$\triangleq [F^-(t), F^+(t)]$

为 $f(t)$在 T 上的区间值导函数，$f(t)$也称为 $F(t)$在 T 上的原函数。

如果对 $\forall t \in T, f^{-'}(t) \leqslant f^{+'}(t)$，则称 $F(t) = [f^{-'}(t), f^{+'}(t)]$为 $f(t)$在 T 上的区间值同序导函数，$f(t)$称为 $F(t)$在 T 上的同序原函数。

如果对 $\forall t \in T, f^{-'}(t) \geqslant f^{+'}(t)$，则称 $F(t) = f'(t) = [f^{+'}(t), f^{-'}(t)]$为 $f(t)$在 T 上的区间值反序导函数，$f(t)$称为 $F(t)$的反序原函数。

(2)设 $f(t) = h(t) + ig(t) = [h^-(t), h^+(t)] + i[g\ \ (t), g^+(t)]$是 T 上的复区间值函数，如果 $h(t), g(t)$在点 t_0 均可导，则称 $f(t)$在 $t_0 \in T$ 点可导，$f(t)$在 t_0 的导数定义为

$$f'(t_0) = h'(t_0) + ig'(t_0) \tag{4.2.4}$$

其中 $h'(t_0), g'(t_0)$均由(4.2.1)给定；

如果 $h\ (t), g(t)$在 $t_0 \in T$ 同序(或反序)可导，则称 $f(t)$在 t_0 同序(或反序)可导；

如果 $h\ (t), g(t)$在 T 上可导，则称 $f(t)$在 T 上可导；

如果 $h\ (t), g(t)$在 T 上同序(或反序)可导，则称 $f(t)$在 T 上同序(或反序)可导。

由定义 4.8　容易得到

定理 4.4　设

$$f(t) = h(t) + ig(t) = [h^-(t), h^+(t)] + i[g^-(t), g^+(t)]$$

在 T 上可导，并且

(1)$h^{-'}(t), h^{+'}(t), g^{-'}(t), g^{+'}(t)$在 T 上连续；

(2) $f^+(t)-f^-(t), g^+(t)-g^-(t)$ 在 T 上最多有有限个零点，则总可把 T 分成有限个小区间，在每一个小区间上 $f(t)=h(t)+ig(t)$ 同序可导或反序可导。

根据定理 4.4，在必要的情况下，可分多个区间讨论复区间值函数的同序（或反序）导函数。以下各结论如果在小区间成立，则可进一步讨论其在整个区间上的相应结论。

容易得到下列结论。

定理 4.5 设复区间值函数 $f(t), g(t)$ 同序（或反序）可导，则有

(1) $(f(t)\pm g(t))'=f'(t)\pm g'(t)$；

(2) $(kf(t))'=kf'(t), k\in C$

4.2.2 一元复模糊集值函数的导数

定义 4.9 设 $\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\,\underset{\sim}{g}(t)$ 为 T 上的复模糊集值函数，如果对 $\forall\alpha\in(0,1], f_\alpha(t)=h_\alpha(t)+ig_\alpha(t)$ 在 T 上可导，则称复模糊集值函数 $\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\,\underset{\sim}{g}(t)$ 在 T 上可导，且称

$$\underset{\sim}{F}(t)\triangleq\underset{\sim}{f}'(t)=\underset{\sim}{h}'(t)+i\,\underset{\sim}{g}(t)$$

$$\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha(h_\alpha(t))'+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha(g_\alpha(t))' \tag{4.2.5}$$

为 $\underset{\sim}{f}(t)$ 在 T 上的导函数。$\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\,\underset{\sim}{g}(t)$ 称为 $\underset{\sim}{F}(t)$ 的原函数。

如果对 $\forall\alpha\in(0,1], f_\alpha(t)=h_\alpha(t)+ig_\alpha(t)$ 在 T 上同序（或反序）可导，则称 $\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\,\underset{\sim}{g}(t)$ 在 T 上同序（或反序）可导，且称

$$\underset{\sim}{F}(t)\triangleq\underset{\sim}{f}'(t)=\underset{\sim}{h}'(t)+i\,\underset{\sim}{g}'(t)$$

$$= \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\,[h_\alpha^{-\prime}(t), h_\alpha^{+\prime}(t)] + i \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\,[g_\alpha^{-\prime}(t), g_\alpha^{+\prime}(t)] \quad (4.2.6)$$

(或 $\underset{\sim}{F}(t) \triangleq \underset{\sim}{f}'(t) = \underset{\sim}{h}'(t) + i\,\underset{\sim}{g}'(t)$

$$= \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\,[h^{+\prime}{}_\alpha(t), h^{-\prime}{}_\alpha(t)] + i \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\,[g^{+\prime}{}_\alpha(t), g^{-\prime}{}_\alpha(t)]) \quad (4.2.7)$$

为 $\underset{\sim}{f}(t) = \underset{\sim}{h}(t) + i\,\underset{\sim}{g}(t)$在 T 上的同序(或反序)导函数,$\underset{\sim}{f}(t) = \underset{\sim}{h}(t) + i\,\underset{\sim}{g}(t)$称为 $\underset{\sim}{F}(t)$的同序(或反序)原函数。

此定义的合理性在于

定理 4.6　设 $\underset{\sim}{f}(t) = \underset{\sim}{h}(t) + i\,\underset{\sim}{g}(t)$为同序(或反序)可导的复模糊集值函数,则对$\forall\,\alpha\in(0,1]$,$\forall\,t\in T$,

$$f'_\alpha(t) = [h^{-\prime}{}_\alpha(t), h^{+\prime}{}_\alpha(t)] + i[g^{-\prime}{}_\alpha(t), g_\alpha^{+\prime}(t)] \quad (4.2.8)$$

$$(\text{或 } f_\alpha'(t) = [h^{+\prime}{}_\alpha(t), h^{-\prime}{}_\alpha(t)] + i[g^{+\prime}{}_\alpha(t), g^{-\prime}{}_\alpha(t)]) \quad (4.2.9)$$

并且 $\underset{\sim}{f}'(t)\in C_0^F(C)$,即 $\underset{\sim}{f}'(t)$为 T 上的复模糊集值函数。

定义 4.10　设 $\underset{\sim}{f}(t) = \underset{\sim}{h}(t) + i\,\underset{\sim}{g}(t)$为 T 上的复模糊集值函数,如果对$\forall\,\alpha\in(0,1]$,$f_\alpha(t) = h_\alpha(t) + ig_\alpha(t)$是 T 上的连续复区间值函数,则称 $\underset{\sim}{f}(t) = \underset{\sim}{h}(t) + i\,\underset{\sim}{g}(t)$为 T 上的连续复模糊集值函数。

定理 4.7　设 $\underset{\sim}{f}(t) = \underset{\sim}{h}(t) + i\,\underset{\sim}{g}(t)$为 $T=[a,b]$上的连续复模糊集值函数,且在$[a,b]$上同序(或反序)可导,则

$$\underset{\sim}{F}(t) = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha \int_a^t h_\alpha(x)dx + i \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha \int_a^t g_\alpha(x)dx$$

$$\triangleq \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\Big[\int_a^t h_\alpha^-(x)dx,\ \int_a^t h_\alpha^+(x)dx\Big] + i \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\Big[\int_a^t$$

$g_a(x)dx, \int_a^t g_a^+(x)dx] = \int_a^t \underset{\sim}{h}(x)dx + i\int_a^t \underset{\sim}{g}(x)dx \quad (4.2.10)$

是 $\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\,\underset{\sim}{g}(t)$的同序(或反序)原函数,即

$$\underset{\sim}{F}'(t) = (\int_a^t \underset{\sim}{h}(x)dx + i\int_a^t \underset{\sim}{g}(x)dx)' = \underset{\sim}{h}(t) + i\,\underset{\sim}{g}(t) \tag{4.2.11}$$

定理 4.8 设 $\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\,\underset{\sim}{g}(t)$为复模糊集值函数。如果

$$\underset{\sim}{F}'(t)=\underset{\sim}{H}'(t)+i\,\underset{\sim}{G}'(t)=\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\,\underset{\sim}{g}(t),$$

则

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{F}(t)+\underset{\sim}{C})' &= (\underset{\sim}{H}(t)+i\,\underset{\sim}{G}(t)+\underset{\sim}{C})' \\ &= \underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\,\underset{\sim}{g}(t)\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

其中 $\underset{\sim}{C}$ 为一常有界闭复模糊数。

定理 4.9 如果 $\underset{\sim}{f}(t),\underset{\sim}{A}(t)$为同序可导的复模糊集值函数,则

(1)$(\underset{\sim}{f}(t)\pm\underset{\sim}{A}(t))'=\underset{\sim}{f}'(t)\pm\underset{\sim}{A}'(t)$;

(2)$(k\,\underset{\sim}{f}(t))'=k\,\underset{\sim}{f}'(t), k\in C$

注:以上定理的证明详见文献[10].

4.2.3 实数集到实模糊数集的映射函数的导数

定义 4.11 一个模糊实数 $\overline{N}$ 是实数直线 R 上的一个模糊子集,其隶属函数记为 $\mu(x|\overline{N})$,满足下列条件:

$(a)\mu(x|\overline{N})$是 R 到闭区间[0,1]上的连续函数;

(b)对所有 $x\in(-\infty,n_1),\mu(x|\overline{N})=0$;

$(c)\mu(x|\overline{N})$在$[n_1,n_2]$上严格递增;

(d)对所有 $x\in[n_2,n_3]$，$\mu(x|\overline{N})=1$

(e)$\mu(x|\overline{N})$在$[n_3,n_4]$上严格递减；

(f)对所有 $x\in[n_4,+\infty]$，$\mu(x|\overline{N})=0$.

这里 n_1,n_2,n_3,n_4 为有限实数，且

$-\infty<n_1<n_2\leqslant n_3<n_4<+\infty$

定义 4.11 中的隶属函数 $\mu(x|\overline{N})$可表为

$$\mu(x|\overline{N})=\begin{cases}\mu^l(x|\overline{N}), & n_1\leqslant x\leqslant n_2\\ 1\quad, & n_2\leqslant x\leqslant n_3\\ \mu^r(x|\overline{N}), & n_3\leqslant x\leqslant n_4\\ 0\quad, & \text{其他}\end{cases}\tag{4.2.13}$$

其中 $\mu^l:[n_1,n_2]\to[0,1]$

$\mu^r:[n_3,n_4]\to[0,1]$

分别称为模糊实数 $\overline{N}$ 的左、右隶属函数。

模糊实数 $\overline{N}$ 的(弱)α 截集记为$\overline{N}(\alpha)$

$\overline{N}(\alpha)=\{x|\mu(x|\overline{N})\geqslant\alpha\}$，$0<\alpha\leqslant1$.

$\overline{N}(0)$是闭区间$[n_1,n_4]$.

所以 α 截集是一闭区间，故设 $\overline{N}(\alpha)=[n_1(\alpha),n_2(\alpha)]$，$0<\alpha\leqslant1$，显然，$n_1(0)=n_1$，$n_1(1)=n_2$，$n_2(1)=n_3$，$n_2(0)=n_4$.

定义 4.12 模糊实数 $\overline{N}$ 称为梯形模糊数，它是由下列隶属函数确定的

$$\mu(x|\overline{N})=\begin{cases}\dfrac{x-n_1}{n_2-n_1}, & n_1\leqslant x\leqslant n_2\\ 1\quad, & n_2\leqslant x\leqslant n_3\\ \dfrac{x-n_4}{n_3-n_4} & n_3\leqslant x\leqslant n_4\\ 0\quad, & \text{其他}\end{cases}\tag{4.2.14}$$

显然,此时 $\overline{N}$ 的左、右隶属函数分别为

$$\mu^l(x|\overline{N})=\frac{x-n_1}{n_2-n_1},$$

$$\mu^r(x|\overline{N})=\frac{x-n_4}{n_3-n_4}.$$

定义 4.13 模糊实数 $\overline{N}$ 称为三角形模糊数,它是由下列隶属函数定义的

$$\mu(x|\overline{N})=\begin{cases}\dfrac{x-n_1}{n_2-n_1}, & n_1\leqslant x\leqslant n_2\\ \dfrac{x-n_4}{n_3-n_4} & n_3\leqslant x\leqslant n_4\\ 0\quad, & \text{其他}\end{cases}\tag{4.2.15}$$

三角形模糊数是梯形模糊数的特殊情况(即(4.2.14)中的 $n_2=n_3$ 之情形)。其左、右隶属函数分别为 $\mu^l(x|\overline{N})=(x-n_1)/(n_2-n_1)$, $\mu^r(x|\overline{N})=(x-n_4)/(n_3-n_4)$.

显然,以上所定义的模糊数均是正规的,对于非正规模糊实数,只要将定义中的映射"$R\to[0,1]$"改为"$R\to[0,\omega]$, $0\leqslant\omega<1$",条件"$\mu(x|\overline{N})=1$"改为"$\mu(x|\overline{N})=\omega$, $0<\omega<1$"即可。

现设 $\overline{R}$ 是实模糊数, $\forall(a,b)\subset(-\infty,\infty)$

令 $F:(a,b)\to\overline{R}$

$F(t)=\overline{N}(t), a<t<b, \overline{N}(t)\in\overline{R}$, $\overline{N}(t)$的隶属函数记为 $y=\mu(x|\overline{N}(t))$,它是 t 的函数。类似于定义 4.11,设

$$\infty<n_1(t)<n_2(t)\leqslant n_3(t)<n_4(t)<+\infty$$

类似有
$$\mu(x|\overline{N}(t))=\begin{cases}\mu^{l}(x|\overline{N}(t)), & n_1(t)\leqslant x\leqslant n_2(t)\\ 1, & n_2(t)\leqslant x\leqslant n_3(t)\\ \mu^{r}(x|\overline{N}(t)), & n_3(t)\leqslant x\leqslant n_4(t)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(4.2.16)

对任意实模糊数 $\overline{N}(t)$,其(弱)α 截集表为

$\overline{N}(t)(\alpha)=[n_1(t,\alpha),n_2(t,\alpha)]$,其端点是 t 和 α 的函数,$0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

定义 4.14 设 L,R 是$[0,+\infty)$到$[0,1]$上的连续函数,且均是严格递减的,并 $L(0)=R(0)=1, L(1)=R(1)=0$,则由从属函数

$$\mu(x|\overline{N}(t))=\begin{cases}L\left(\dfrac{n_2(t)-x}{n_2(t)-n_1(t)}\right), & n_1(t)\leqslant x\leqslant n_2(t)\\ R\left(\dfrac{x-n_2(t)}{n_3(t)-n_2(t)}\right), & n_2(t)\leqslant x\leqslant n_3(t)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(4.2.17)

定义的实模糊数 $\overline{N}(t)$称为 $L-R$ 型模糊数,其中 L,R 分别是$\overline{N}(t)$的左、右隶属函数。

定义 4.15 设对于 $t\in(a,b)$及 $\alpha\in[0,1]$, $n_i(t,\alpha)$关于 t 的(偏)导数 $\dot{n}_i(t,\alpha)$存在,$i=1,2$,则称对 $t\in(a,b)$, $F(t)=\overline{N}$

(t)的导数存在，记为 $F'(t)$，它是一实模糊子集，其隶属函数为

$$\mu(x \mid F'(t)) = sup\{\alpha \mid x = \dot{n}_1(t,\alpha), x = \dot{n}_2(t,\alpha), 0\leqslant\alpha\leqslant 1\} \tag{4.2.18}$$

(这里约定空集的上确界为 0，故对 $0<\alpha\leqslant 1$，当 $x\neq \dot{n}_1(t,\alpha)$和 $x \neq \dot{n}_2(t,\alpha)$时，$\mu(x \mid F'(t))=0$).

4.2.4　实数集到模糊复数集 $\overline{C}(\overline{C}^*)$的映射函数的导数

令 $\overline{C}(\overline{C}^*)$表示模糊复数(广义模糊复数)集。

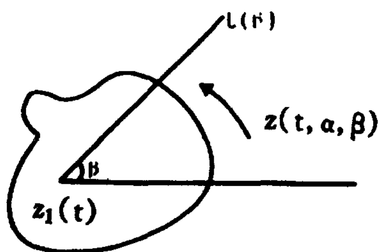
设　$F:(a,b)\rightarrow\overline{C}^*,(a,b)\subset(-\infty,\infty)$

则　$F(t)=\overline{Z}(t),\quad t\in(a,b)$

$\overline{Z}(t)$的(弱)α 截集记为$\overline{Z}(t)(\alpha)$，也可以记为 $\Omega_t(\alpha)$，$0<\alpha\leqslant 1$，

$\overline{Z}(t)(0)$为 $\Omega_t(\alpha)$之并的闭包，$0<\alpha\leqslant 1$，

假设　$\overline{Z}(t)(1)=\{z_1(t)\}$是单点集，$a<t<b$，$z_1(t)$属于 $\Omega_t(\alpha)$的内部。对任意 α 截集 $\Omega_t(\alpha)$，$0\leqslant\alpha<1$. 在复平面内，由 $z_1(t)$沿 x 轴正向作角β，而射线 $L(\beta)$如图



用$\partial\Omega_t(\alpha)$表示 $\Omega_t(\alpha)$的边界：

$$L(\beta)\cap\partial\Omega_t(\alpha)=S(t,\alpha,\beta) \tag{4.2.19}$$

称 $F(t)$是星形的，当且仅当 $S(t,\alpha,\beta)$是一单点集，记之为：$z(t,\alpha,\beta)$，$0\leqslant\alpha<1,0\leqslant\beta<2\pi$.

为使 β 取值于闭区间，将其取值范围扩为 $0\leqslant\beta\leqslant2\pi$（只要 $z(t,\alpha,0)=z(t,\alpha,2\pi)$）.

记 $z(t,\alpha,\beta)=x(t,\alpha,\beta)+iy(t,\alpha,\beta)$

对所有 t,α,β，假设 $x(t,\alpha,\beta),y(t,\alpha,\beta)$关于 t 的导数（偏导）$\dot{x}(t,\alpha,\beta),\dot{y}(t,\alpha,\beta)$存在。下面介绍 $F(t)$的两种导数定义。

定义 4.16 设 $F(t)=\overline{Z}(t)\in\overline{C}^*$ 是星形的，$t\in(a,b)$，$F'(t)$是一复模糊数子集，它是用下列隶属函数定义的：

$$\mu_1(z)=\mu_1(z\mid F'(t))=sup\{\alpha\mid z=\dot{x}(t,\alpha,\beta)+i\dot{y}(t,\alpha,\beta),0\leqslant\alpha\leqslant1,0\leqslant\beta\leqslant2\pi\} \tag{4.2.20}$$

$F'(t)$的弱 α 截集记为$F'(t)(\alpha)$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$.

引理 假设 $\dot{x}(t,\alpha,\beta),\dot{y}(t,\alpha,\beta)$是 α,β 的连续函数，则

(a)若 $\mu_1(z)=\alpha,0<\alpha<1$，则存在一 $\beta^*\in[0,2\pi]$使 $z=\dot{x}(t,\alpha,\beta^*)+i\dot{y}(t,\alpha,\beta^*)$

$(b)F'(t)(0)=Re\times Im$

$(c)F'(t)(1)=\{\dot{z}_1(t)\}$

$(d)F'(t)(\alpha)=\Gamma(\alpha),0<\alpha<1$，其中

$$\Gamma(\alpha)=\{\dot{x}(t,\gamma,\beta)+i\dot{y}(t,\gamma,\beta)\mid\alpha\leqslant\gamma\leqslant1,0\leqslant\beta\leqslant2\pi\} \tag{4.2.21}$$

此引理的证明见文[40]。

定义 4.17 令

$$\mu^{(r)}(x)=\mu(x \mid ReF'(t))=sup\{\alpha \mid x=\dot{x}(t,\alpha,\beta),0\leqslant\alpha\leqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2\pi\} \tag{4.2.22}$$

$$\mu^{(i)}(y)=\mu(y \mid ImF'(t))=sup\{\alpha \mid y=\dot{y}(t,\alpha,\beta),0\leqslant\alpha\leqslant 1, 0\leqslant\beta\leqslant 2\pi\} \tag{4.2.23}$$

则 $F'(t)$是 C 上的一个模糊子集,其隶属实数为

$$\mu_2(z)=\mu_2(z \mid F'(t))=min(\mu^{(r)}(x),\mu^{(i)}(y)) \tag{4.2.24}$$

其中 $z=x+iy\in C$。

显然: $\mu_1(z)=\mu_2(z)$ (4..2.25)

(4.2.25)式的证明直接用定义即可,详见文[40].

定理 4.10 对所有 $t\in(a,b)$,若 $\overline{X}(t),\overline{Y}(t)$为三角形(或梯形或 LR 型)模糊实数,$F(t)=\overline{X}(t)+i\,\overline{Y}(t)$,则按定义 4.17 有

$$F'(t)=\overline{X}'(t)+i\,\overline{Y}'(t) \tag{4.2.26}$$

其中 $\overline{X}'(t),\overline{Y}'(t)$对所有 $t\in(a,b)$均存在.

此定理由前述有关定义及引理直接得证。

根据定理 4.10 的结论及 α 截集的性质我们可以推出下列定理成立。

定理 4.11 对所有 $t\in(a,b)$,若 $\overline{X}(t),\overline{Y}(t),\overline{U}(t),\overline{V}(t)$均为三角形(或梯形或 LR 型)模糊实数,并设

$$\begin{aligned} F(t)&=\overline{X}(t)+i\,\overline{Y}(t) \\ G(t)&=\overline{U}(t)+i\,\overline{V}(t) \end{aligned} \qquad t\in(a,b)$$

则按定义 4.17 有

$$[F(t)+G(t)]'=F'(t)+G'(t)=(\overline{X}'(t)+\overline{U}'(t))+i(\overline{Y}'(t)+\overline{V}'(t)) \tag{4.2.27}$$

$a<t<b,\overline{X}'(t),\overline{Y}'(t),\overline{U}'(t),\overline{V}'(t)$均存在.

4.2.5 一元复模糊集值函数的高阶导数[10]

定义 4.18 设 $\underset{\sim}{f}(t)$为复模糊集值函数,$\underset{\sim}{f}(t)$的导函数,同序(或反序)导函数 $\underset{\sim}{f}'(t)$分别称为一阶导数和一阶同序(或反序)导数;如果 $\underset{\sim}{f}'(t)$存在,则称

$$(\underset{\sim}{f}'(t))'=\underset{\sim}{f}''(t)$$

为 $\underset{\sim}{f}(t)$的二阶导数 ,或二阶同序导数,或二阶反序导数;也可记为$\dfrac{d^2\underset{\sim}{f}(t)}{dt^2}$;如果 $\underset{\sim}{f}''(t)$存在,则称

$$(\underset{\sim}{f}''(t))'=\underset{\sim}{f}'''(t)$$

为 $\underset{\sim}{f}(t)$的三阶导数,或三阶同序导数,或三阶反序导数,也可记为$\dfrac{d^3\underset{\sim}{f}(t)}{dt^3}$;

依此类推,复模糊集值函数 $\underset{\sim}{f}(t)$的 $n-1$ 阶导数的导数,$n-1$ 阶同序导数的同序导数和 $n-1$ 阶反序导数的反序导数分别称为 $\underset{\sim}{f}(t)$的 n 阶导数,n 阶同序导数和 n 阶反序导数,记为 $\underset{\sim}{f}^{(n)}(t)$,即

$$\underset{\sim}{f}^{(n)}(t)=(\underset{\sim}{f}^{(n-1)}(t))'$$

也可记为$\dfrac{d^n\underset{\sim}{f}(t)}{dt^n}$。

二阶与二阶以上的导数,同序导数和反序导数,统称为高阶导数。从高阶导数的定义可以知道,求高阶导数无非是反复运用求一阶导数的方法。

定理 4.12　设 $\underset{\sim}{f}(t)$ 为复模糊集值函数,并且其 n 阶同序导数(或 n 阶导数、n 阶反序导数)存在,$A(t)$ 为 n 次可微的实函数,则

$$[A(t)\underset{\sim}{f}(t)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^{(n-k)}(t)\underset{\sim}{f}^{(k)}(t) \tag{4.2.28}$$

4.2.6　多元复模糊集值函数的偏导数

我们仅讨论二元的情形,$n(\geqslant 3)$元的情形类似。

定义 4.19　(1)　设 $T,\Omega\subseteq R$,称

$f:T\times\Omega\to I(R)=\{[x,y]\mid x,y\in R,\ x\leqslant y\}$,

$(t,\omega)\to f(t,\omega)=[f^-(t,\omega),f^+(t,\omega)]$

为 $T\times\Omega$ 上的二元区间值函数。

(2)　称 $\underset{\sim}{f}:T\times\Omega\to F_0(R),(t,\omega)\to\underset{\sim}{f}(t,\omega)$ 为定义在 $T\times\Omega$ 上的二元实模糊集值函数,其 α 水平函数定义为

$f_\alpha(t,\omega)\triangleq(\underset{\sim}{f}(t,\omega))_\alpha\triangleq[f_\alpha^-(t,\omega),f_\alpha^+(t,\omega)]$

如果对 $\forall\alpha\in(0,1]$,$f_\alpha^-(t,\omega),f_\alpha^+(t,\omega)$ 在 $T\times\Omega$ 上均可微分,则称 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)$ 在 $T\times\Omega$ 上可微分。称

$$\underset{\sim}{f}'_t(t,\omega)\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha f'_{\alpha,t}(t,\omega) \tag{4.2.29}$$

为 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)$ 关于 t 的偏导函数,也可记为 $\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{f}(t,\omega)$,其中

$$f'_{\alpha,t}(t,\omega)=[\min\{f_{\alpha,t}^{-'}(t,\omega),f_{\alpha,t}^{+'}(t,\omega)\},\max\{f_{\alpha,t}^{'}(t,\omega),f_{\alpha,t}^{+'}(t,\omega)\}] \tag{4.2.30}$$

称

$$\underset{\sim}{f}'_\omega(t,\omega)\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha f'_{\alpha,\omega}(t,\omega) \tag{4.2.31}$$

为 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)$ 关于 ω 的偏导函数,也可记为 $\frac{\partial\underset{\sim}{f}(t,\omega)}{\partial\omega}$,其中

$$f'_{\alpha,\omega}=[\min\{f^{-'}_{\alpha,\omega},f^{+'}_{\alpha,\omega}\},\max\{f^{-'}_{\alpha,\omega},f^{+'}_{\alpha,\omega}\}] \tag{4.2.32}$$

如果对 $\forall\alpha\in(0,1]$，$\forall(t,\omega)\in T\times\Omega$，$f^{-'}_{\alpha,t}(t,\omega)\leqslant f^{+'}_{\alpha,t}(t,\omega)$，$f^{-'}_{\alpha,\omega}(t,\omega)\leqslant f^{+'}_{\alpha,\omega}(t,\omega)$，则分别称

$$\underset{\sim}{f}'_t(t,\omega)\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[f^{-'}_{\alpha,t}(t,\omega),f^{+'}_{\alpha,t}(t,\omega)] \tag{4.2.33}$$

$$\underset{\sim}{f}'_\omega(t,\omega)\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[f^{-'}_{\alpha,\omega}(t,\omega),f^{+'}_{\alpha,\omega}(t,\omega)] \tag{4.2.34}$$

为 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)$ 关于 t 和关于 ω 的同序偏导函数。

如果对 $\forall\alpha\in(0,1]$，$\forall(t,\omega)\in T\times\Omega$，$f^{-'}_{\alpha,t}(t,\omega)\geqslant f^{+'}_{\alpha,t}(t,\omega)$，$f'_{\alpha,\omega}(t,\omega)\geqslant f^{+'}_{\alpha,\omega}(t,\omega)$，则分别称

$$\underset{\sim}{f}'_t(t,\omega)\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[f^{+'}_{\alpha,t}(t,\omega),f^{-'}_{\alpha,t}(t,\omega)] \tag{4.2.35}$$

$$\underset{\sim}{f}'_\omega(t,\omega)\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[f^{+'}_{\alpha,\omega}(t,\omega),f^{-'}{}_{\alpha,\omega}(t,\omega)] \tag{4.2.36}$$

为 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)$ 关于 t 和关于 ω 的反序偏导函数。

(3)称 $\underset{\sim}{f}:T\times\Omega\to C_0^F(C)$，$(t,\omega)\to\underset{\sim}{f}(t,\omega)=\underset{\sim}{h}(t,\omega)+i\underset{\sim}{g}(t,\omega)$ 为定义在 $T\times\Omega$ 上的二元复模糊集值函数，其 α 水平函数定义为

$$\begin{aligned}f_\alpha(t,\omega)&=h_\alpha(t,\omega)+ig_\alpha(t,\omega)\triangleq(\underset{\sim}{f}(t,\omega))_\alpha\\&=(\underset{\sim}{h}(t,\omega)+i\underset{\sim}{g}(t,\omega))_\alpha\\&\triangleq[f_\alpha^-(t,\omega),f_\alpha^+(t,\omega)]+i[g_\alpha^-(t,\omega),g_\alpha^+(t,\omega)]\end{aligned}$$

如果 $\underset{\sim}{h}(t,\omega)$，$\underset{\sim}{g}(t,\omega)$ 关于 t 和关于 ω 的偏导数(或同序、反序偏导数)分别为 $\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{h}(t,\omega)$，$\frac{\partial}{\partial\omega}\underset{\sim}{h}(t,\omega)$，$\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{g}(t,\omega)$，$\frac{\partial}{\partial\omega}\underset{\sim}{g}(t,\omega)$，则 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)$ 关于 t 和关于 ω 的偏导数(或同序偏导数、反序偏导数)分别为

$$\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{f}(t,\omega)=\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{h}(t,\omega)+i\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{g}(t,\omega) \tag{4.2.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\underset{\sim}{f}(t,\omega)=\frac{\partial}{\partial \omega}\underset{\sim}{h}(t,\omega)+i\frac{\partial}{\partial \omega}\underset{\sim}{g}(t,\omega) \tag{4.2.38}$$

此定义的合理性在于

定理 4.13 设复模糊集值函数 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)=\underset{\sim}{h}(t,\omega)+i\,\underset{\sim}{g}(t,\omega)$关于 t 和 ω 有同序(或反序)偏导数,则

对 $\alpha\in(0,1]$, $\forall(t,\omega)\in T\times\Omega$,

$$\frac{\partial}{\partial t}f_\alpha(t,\omega)=[\frac{\partial}{\partial t}h_\alpha^-(t,\omega),\quad \frac{\partial}{\partial t}h_\alpha^+(t,\omega)]$$

$$+i[\frac{\partial}{\partial t}g_\alpha^-(t,\omega),\frac{\partial}{\partial t}g_\alpha^+(t,\omega)]$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega}f_\alpha(t,\omega)=[\frac{\partial}{\partial \omega}h_\alpha^-(t,\omega),\frac{\partial}{\partial \omega}h_\alpha^+(t,\omega)]$$

$$+i[\frac{\partial}{\partial \omega}g_\alpha^-(t,\omega),\frac{\partial}{\partial \omega}g_\alpha^+(t,\omega)]$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}f_\alpha(t,\omega)=[\frac{\partial}{\partial t}h_\alpha^+(t,\omega),\frac{\partial}{\partial t}h_\alpha^-(t,\omega)]$$

$$+i[\frac{\partial}{\partial t}g_\alpha^+(t,\omega),\frac{\partial}{\partial t}g_\alpha^-(t,\omega)]$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega}f_\alpha(t,\omega)=[\frac{\partial}{\partial \omega}h_\alpha^+(t,\omega),\frac{\partial}{\partial \omega}h_\alpha^-(t,\omega)]$$

$$+i[\frac{\partial}{\partial \omega}g_\alpha^+(t,\omega),\frac{\partial}{\partial \omega}g_\alpha^-(t,\omega)]$$

并且$\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{f}=\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{h}+i\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{g}$, $\frac{\partial}{\partial \omega}\underset{\sim}{f}=\frac{\partial}{\partial \omega}\underset{\sim}{h}+i\frac{\partial}{\partial \omega}\underset{\sim}{g}\in C_0^F(C)$为复模糊集值函数。

下面讨论二元复模糊集值函数的高阶偏导数。

定义 4.20 设二元复模糊集值函数 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)=\underset{\sim}{h}(t,\omega)+i\,\underset{\sim}{g}(t,\omega)$在 $T\times\Omega$ 区域内具有同序(或反序)偏导$\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{f}(t,\omega)$和$\frac{\partial}{\partial \omega}\underset{\sim}{f}$

(t,ω)。如果$\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{f}(t,\omega)$和$\frac{\partial}{\partial \omega}\underset{\sim}{f}(t,\omega)$在 $T\times\Omega$ 区域内也具有同序(或反序)偏导数,则称它们为 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)$的二阶同序(或反序)偏导数。依照对变量求导次序不同则有下列四个二阶同序(或反序)偏导数:

(1)$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underset{\sim}{f}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underset{\sim}{h}+i\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\underset{\sim}{g}$

$$\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}h_\alpha^-,\frac{\partial^2}{\partial t^2}h_\alpha^+\right]+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}g_\alpha^-,\frac{\partial^2}{\partial t^2}g_\alpha^+\right]$$

(2)$\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}\underset{\sim}{f}=\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}\underset{\sim}{h}+i\ \frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}\underset{\sim}{g}$

$$\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}h_\alpha^-,\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}h_\alpha^+\right]+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}g_\alpha^-,\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}g_\alpha^+\right]$$

(3)$\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}\underset{\sim}{f}=\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}\underset{\sim}{h}+i\ \frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}\underset{\sim}{g}$

$$\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}h_\alpha^-,\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}h_\alpha^+\right]+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}g_\alpha^-,\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}g_\alpha^+\right]$$

(4)$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\underset{\sim}{f}=\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\underset{\sim}{h}+i\ \frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\underset{\sim}{g}$

$$\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}h_\alpha^-,\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}h_\alpha^+\right]+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}g_\alpha^-,\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}g_\alpha^+\right]$$

其中(2)、(3)形式的同序(或反序)偏导数称为混合同序(或反序)偏导数。

同样可得到三阶、四阶,…,以及 n 阶同序(或反序)偏导数。二阶以及二阶以上的同序(或反序)偏导数,统称为高阶同序(或反序)偏导数。

此定义的合理性在于

定理 4.14 设复模糊集值函数 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)=\underset{\sim}{h}(t,\omega)+i\,\underset{\sim}{g}(t,$

$\omega)$

在 $T\times\Omega$ 区域内具有二阶同序(或反序)偏导数,则对 $\forall\,\alpha\in(0,1]$, $\forall\,(t,\omega)\in T\times\Omega$,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_\alpha=\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}h_\alpha,\frac{\partial^2}{\partial t^2}h_\alpha^+\right]+i\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}g_\alpha^-,\frac{\partial^2}{\partial t^2}g_\alpha^+\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}f_\alpha=\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}h_\alpha,\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}h_\alpha^+\right]+i\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}g_\alpha^-,\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}g_\alpha^+\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}f_\alpha=\left[\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}h_\alpha,\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}h_\alpha^+\right]+i\left[\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}g_\alpha,\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}g_\alpha^+\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}f_\alpha=\left[\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}h_\alpha,\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}h_\alpha^+\right]+i\left[\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}g_\alpha^-,\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}g_\alpha^+\right]$$

并且

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underset{\sim}{f}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underset{\sim}{h}+i\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underset{\sim}{g},\ \frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}\underset{\sim}{f}=\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}\underset{\sim}{h}+i\,\frac{\partial^2}{\partial t\partial\omega}\underset{\sim}{g},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}\underset{\sim}{f}=\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}\underset{\sim}{h}+i\,\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial t}\underset{\sim}{g},\ \frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\underset{\sim}{f}=\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\underset{\sim}{h}+i\,\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\underset{\sim}{g}\in C_0^F(C)$$

均是复模糊集值函数。

§4.3 模糊值函数的曲线和曲面积分

4.3.1 区间值函数的积分与模糊值函数的曲线与曲面积分

下面先给出区间值函数与 *Fuzzy* 值函数在平面或空间的可度量的几何体上的积分,进而给出区间值函数与 *Fuzzy* 值函数的曲线积分和曲面积分,并讨论它们的性质和计算方法。为精练起见,给出的定理均不加证明,读者可参见[45],[28].

定义 4.21 设 Ω 是平面或空间可度量的几何体,$\overline{f}=[f^-,$

f^{+}]是定义在 Ω 上的区间值函数,若 f^{-}, f^{+} 在 Ω 上均可积,则称区间值函数在几何体 Ω 上可积,且

$$\int_{\Omega}\bar{f} \triangleq [\int_{\Omega}f^{-}, \int_{\Omega}f^{+}] \tag{4.3.1}$$

由此可知 $\int_{\Omega}\bar{f} \in \overline{R}$。

定理 4.15 设 Ω 是平面或空间可度量的几何体, $\bar{f}$ 是定义在 Ω 上的区间值函数,若 $\bar{f}$ 在 Ω 上连续,则 $\bar{f}$ 在几何体 Ω 上可积。

注记 1 当 Ω 是区间[a, b]时,(4.3.1)式就是区间值函数的定积分。记作:

$$\int_{a}^{b}\bar{f}(x)dx \triangleq [\int_{a}^{b}f^{-}(x)dx, \int_{a}^{b}f^{+}(x)dx].$$

注记 2 当 Ω 是平面或空间曲线 L,则称(4.3.1)式为定义在曲线 L 上区间值函数 $\bar{f}$ 在曲线 L 上的曲线积分,特别记作

$$\int_{L}\bar{f}(x,y)ds \triangleq [\int_{L}f^{-}(x,y)ds, \int_{L}f^{+}(x,y)ds].$$

或

$$\int_{L}\bar{f}(x,y,z)ds \triangleq [\int_{L}f^{-}(x,y,z)ds, \int_{L}f^{+}(x,y,z)ds].$$

这里 ds 为曲线 L 的弧微分。

注记 3　当 Ω 是空间曲面块 S 时，则称(4.3.1)式为区间值函数 $\overline{f}(x,y,z)$ 在曲面 S 上的曲面积分，特别记作

$$\iint_S \overline{f}(x,y,z)dS \triangleq \left[\iint_S f^-(x,y,z)dS, \iint_S f^+(x,y,z)dS\right]$$

这里 dS 为曲面 S 的面积微元。

4.3.2　**积分性质**

定理 4.16(线性性)　设 Ω 是可度量的几何体，$\overline{f}$、$\overline{g}$ 是定义在 Ω 上的区间值函数，若 $\overline{f}$、$\overline{g}$ 在 Ω 上可积，则 $\forall\, \alpha$、$\beta \in R$，$(\alpha\overline{f}+\beta\overline{g})$ 在 Ω 上可积，且

$$\int_\Omega (\alpha\overline{f}+\beta\overline{g}) = \alpha\int_\Omega \overline{f} + \beta\int_\Omega \overline{g} \qquad (4.3.2)$$

定理 4.17(积分域的可加性)　设 Ω 可被划分成有限个相连接的可度量的小几何体 $\Omega_i (i=1,2,\cdots,k)$，若 $\overline{f}$ 在 Ω 上可积，则 $\overline{f}$ 在 $\Omega_i (i=1,2\cdots,k)$ 上也可积，且

$$\int_\Omega \overline{f} = \sum_{i=1}^{k}\int_{\Omega_i}\overline{f}. \qquad (4.3.3)$$

反之，若 $\overline{f}$ 在 $\Omega_i (i=1,2,\cdots,k)$ 上都可积，则 $\overline{f}$ 在 Ω 上可积，且(4.3.3)成立。

定理 4.18　设 Ω 是可度量的几何体，$\overline{f}$，$\overline{g}$ 是定义在 Ω 上的

区间值函数，且 $\overline{f}$、$\overline{g}$ 在 Ω 上可积，若 $\forall P\in\Omega$，$\overline{f}(P)\leqslant\overline{g}(P)$，则

$$\int_\Omega \overline{f}\leqslant\int_\Omega \overline{g}.$$

定理 4.19 设 Ω 是可度量的几何体，$\overline{f}$、$\overline{g}$ 是定义在 Ω 上的区间值函数，且 $\overline{f}$、$\overline{g}$ 在 Ω 上可积，若 $\forall P\in\Omega$，$\overline{f}(P)\subset\overline{g}(P)$则

$$\int_\Omega \overline{f}\subset\int_\Omega \overline{g}.$$

4.3.3 区间值函数的曲线积分计算

定理 4.20 设有光滑曲线

$$L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t), \qquad t\in(\alpha,\beta].\end{cases}$$

区间值函数 $\overline{f}$ 是定义在曲线 L 上的连续函数，则

$$\int_L \overline{f}(x,y)ds=\int_\alpha^\beta \overline{f}(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt. \tag{4.3.4}$$

定理 4.21 设有光滑曲线

$$L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t), \qquad t\in[\alpha,\beta].\\ z=z(t),\end{cases}$$

区间值函数 $\overline{f}(x,y,z)$是定义在曲线 L 上的连续函数，则

$$\int_L \bar{f}(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta \bar{f}(x(t),$$

$$y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt. \tag{4.3.5}$$

4.3.4 区间值函数的曲面积分的计算

定理 4.22 设有光滑曲面

$S: z = z(x,y) \qquad (x,y)\in D$

$\bar{f}$ 是定义在曲面 S 上的连续区间值函数,则

$$\iint_S \bar{f}(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D \bar{f}(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy. \tag{4.3.6}$$

定义 4.22 设有光滑曲面

$$S:\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \qquad (u,v)\in D$$

且其雅可比行列式 $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)},\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)},\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$ 中在 D 上至少有一个不等于零,$\bar{f}(x,y,z)$ 是定义在曲面 S 上的连续区间值函数,则

$$\iint_S \bar{f}(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D \bar{f}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv. \tag{4.3.7}$$

其中 $E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$, $F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$, $G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$.

4.3.5 Fuzzy 值函数的曲线 Fuzzy 积分和曲面 Fuzzy 积分

1. 基本概念

定义 4.23 设 Ω 是平面或空间可度量的几何体,$\tilde{f}$ 是定义在 Ω 上的 F 函数,若 $\forall\lambda\in(0,1]$,$\tilde{f}$ 的 λ 截函数 f_λ 在 Ω 上可积,则称 F 函数 $\tilde{f}$ 在几何体 Ω 上分层可积,简称 Fuzzy 可积,记 F 可积,其积分

$$\int_\Omega \tilde{f} \triangleq \bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\int_\Omega f_\lambda=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\left[\int_\Omega f_\lambda^-,\int_\Omega f_\lambda^+\right] \tag{4.3.8}$$

称 $\int_\Omega \tilde{f}$ 为 F 函数 $\tilde{f}$ 在几何体 Ω 上的 F 积分。

定理 4.23 设 Ω 是平面或空间可度量的几何体,若 $\tilde{f}$ 是在几何体 Ω 上连续的 F 函数,则 F 函数 $\tilde{f}$ 在 Ω 上 F 可积。

定理 4.24 设 Ω 是平面或空间可度量的几何体,$\tilde{f}$ 是定义在 Ω 上的 F 函数,若 $\tilde{f}$ 在 Ω 上 F 可积,则 $\int_\Omega \tilde{f}\in F(R)$,且

$$\left(\int_\Omega \tilde{f}\right)_\lambda=\bigcap_{n=1}^{\infty}\int_\Omega f_{\lambda_n}。$$

其中 $\lambda_n=\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\lambda$, $\lambda\in(0,1]$, $n=1,2,\cdots$.

证明 令 $H:(0,1]\to\overline{R}$

$$\lambda\to H(\lambda)\triangleq\int_\Omega f_\lambda=\left[\int_\Omega f_\lambda^-,\int_\Omega f_\lambda^+\right].$$

若 $\lambda_1<\lambda_2$,则 $[f_{\lambda_1}^-(P),f_{\lambda_1}^+(P)]\supset[f_{\lambda_2}^-(P),f_{\lambda_2}^+(P)]$, $P\in\Omega$。由

定理 4.19

$$[\int_\Omega f_{\lambda_1}^-, \int_\Omega f_{\lambda_1}^+] \supset [\int_\Omega f_{\lambda_2}^-, \int_\Omega f_{\lambda_2}^+]。$$

由 *Fuzzy* 数的表现定理

$$\int_\Omega \tilde{f} = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda \int_\Omega f_\lambda = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda [\int_\Omega f_\lambda^-, \int_\Omega f_\lambda^+] \in F(R),$$

且

$$(\int_\Omega \tilde{f})_\lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_{\lambda_n},$$

其中 $\lambda_n = (1 - \frac{1}{n+1})\lambda, \lambda \in (0,1]$，$\int_\Omega \tilde{f}$ 的隶属函数为

$$(\int_\Omega \tilde{f})(z) = \begin{cases} 1, & z \in [m^-, m^+], \\ L(z), & z < m^-, \\ R(z), & z > m^+, \end{cases}$$

其中，$m^- = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\lambda_n}^-$，$m^+ = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\lambda_n}^+$，$L(z) = \bigvee_{0<\lambda<1} \{\lambda \mid \int_\Omega f_\lambda^- \leqslant z\}$，$R(z) = \bigvee_{0<\lambda<1} \{\lambda \mid \int_\Omega f_\lambda^+ \geqslant z\}$。

注记 1　当 Ω 是区间 $[a,b]$ 时，(4.3.8)式就是 *Fuzzy* 值函数的 F 定积分，

$$\int_a^b \tilde{f}(x)dx \triangleq \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda \int_a^b f_\lambda(x)dx$$

$$= \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda [\int_a^b f_\lambda^-(x)dx, \int_a^b f_\lambda^+(x)dx]$$

注记 2　当 Ω 是平面或空间曲线段 L 时，则称(4.3.8)式为定义在曲线 L 上的 *Fuzzy* 值函数 $\tilde{f}$ 在曲线 L 上的曲线 *Fuzzy* 积

分，特别记作

$$\int_L \tilde{f}(x,y)ds \triangleq \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda \int_L f_\lambda(x,y)ds$$

$$= \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda \left[\int_L f_\lambda^-(x,y)ds, \int_L f_\lambda^+(x,y)ds\right],$$

或

$$\int_L \tilde{f}(x,y,z)ds \triangleq \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda \int_L f_\lambda(x,y,z)ds$$

$$= \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda \left[\int_L f_\lambda^-(x,y,z)ds, \int_L f_\lambda^+(x,y,z)ds\right].$$

其中 ds 为曲线段 L 的弧微元。

注记 3　当 Ω 是空间曲面块 S 时，则称(4.3.8)式为定义在曲面 S 上的 Fuzzy 值函数 $\tilde{f}$ 在曲面 S 上的曲面 Fuzzy 积分，特别记作

$$\iint_S \tilde{f}(x,y,z)dS \triangleq \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda \iint_S f_\lambda(x,y,z)dS$$

$$= \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda \left[\iint_S f_\lambda^-(x,y,z)dS, \iint_S f_\lambda^+(x,y,z)dS\right]。$$

其中 dS 为曲面 S 的面积微元。

2. 积分性质

定理 4.25(线性性)　设 Ω 是可度量的几何体，$\tilde{f}$、$\tilde{g}$ 是定义在 Ω 上的 F 函数，若 $\tilde{f}$、$\tilde{g}$ 在 Ω 上可积，则 $\forall\, \alpha, \beta \in R$，$(\widetilde{\alpha f + \beta g})$ 在 Ω 上也可积，且

$$\int_\Omega (\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}) = \alpha\int_\Omega \tilde{f} + \beta\int_\Omega \tilde{g} \qquad (4.3.9)$$

定理 4.26(积分域的可加性)　设 Ω 可被划分成有限个相连

接的可度量的小几何体$\Omega_i(i=1,2,\cdots,k)$，若$\tilde{f}$在Ω上可积，则$\tilde{f}$在$\Omega_i(i=1,2\cdots,k)$也可积，且

$$\int_\Omega \tilde{f} = \sum_{i=1}^{k}\int_{\Omega i}\tilde{f} \qquad (4.3.10)$$

反之，若$\tilde{f}$在$\Omega_i(i=1,2,\cdots,k)$上都可积，则$\tilde{f}$在Ω上可积，且(4.3.10)式成立。

定理 4.27 设Ω是可度量的几何体，$\tilde{f}$、$\tilde{g}$是定义在Ω上的F函数，且$\tilde{f}$、$\tilde{g}$在Ω上都F可积，若$\forall P\in\Omega$，$\tilde{f}(P)\leqslant\tilde{g}(P)$，则$\int_\Omega\tilde{f}\leqslant\int_\Omega\tilde{g}$。

定理 4.28 设Ω是可度量的几何体，$\tilde{f}$、$\tilde{g}$是定义在Ω上的F函数，且$\tilde{f}$、$\tilde{g}$在Ω上都F可积，若$\forall P\in\Omega$，$\tilde{f}(P)\subset\tilde{g}(P)$，则

$$\int_\Omega\tilde{f}\subset\int_\Omega\tilde{g}$$

3. *Fuzzy* 函数的曲线 *Fuzzy* 积分的计算

定理 4.29 设有光滑曲线

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t), & t\in[\alpha,\beta] \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

Fuzzy 函数$\tilde{f}(x,y)$是定义在曲线L上的连续函数，则

$$\int_L\tilde{f}(x,y)ds = \int_\alpha^\beta\tilde{f}(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt$$

$$\triangleq \bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\int_\alpha^\beta f_\lambda(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt$$

$$\triangleq \bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda[\int_\alpha^\beta f_\lambda^-(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_{\lambda}^{+}(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\psi'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2} dt]$$

定理 4.30 设有光滑曲线

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t), \end{cases}$$

Fuzzy 值函数 $\tilde{f}(x, y, z)$ 是定义在曲线 L 上的连续函数，则

$$\int_L \tilde{f}(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} \tilde{f}(x(t), y(t), z(t))$$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

4. *Fuzzy* 值函数的曲面 *Fuzzy* 积的计算

定理 4.31 设有光滑曲面

$$S: z = z(x, y) \qquad\qquad (x, y) \in D$$

$\tilde{f}(x, y, z)$ 是定义在曲面 S 上的连续的 *Fuzzy* 值函数，则

$$\iint_S \tilde{f}(x, y, z) dS = \iint_S \tilde{f}(x, y, z(x, y))$$

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$

$$\triangleq \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda \iint_S f_{\lambda}(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$

定理 4.32 设有光滑曲面

$$S: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \qquad (u, v) \in D \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

且雅可比行列式 $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}, \dfrac{D(y, z)}{D(u, v)}, \dfrac{D(z, x)}{D(u, v)}$ 中至少有一个不等于零，$\tilde{f}(x, y, z)$ 是定义在曲面 S 上的连续区间值函数，则

$$\iint_S \tilde{f}(x,y,z)dS = \iint_D \tilde{f}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}$$

$$dudv = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda \iint_D f_\lambda(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}$$

$$dudv.$$

其中 $E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$，$F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$，$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$。

§4.4 复模糊集值函数的积分

本节给出定理均不加证明，读者可参见文[10]有关章节。

4.4.1 一元复区间值函数的积分

定义 4.24 设

$$f(t)=h(t)+ig(t)=[h^-(t),h^+(t)]+i[g^-(t),g^+(t)]$$

是 T 上的复区间值函数。如果 $h^-(t),h^+(t),g^-(t),g^+(t)$ 均在 T 上可积，则称复区间值函数 $f(t)=h(t)+ig(t)$ 在 T 上可积，并且称闭复区间数

$$\begin{aligned}\int_T f(t)dt &\triangleq \int_T h(t)dt + i\int_T g(t)dt \\ &\triangleq \left[\int_T h^-(t)dt,\ \int_T h^+(t)dt\right] \\ &\quad + i\left[\int_T g^-(t)dt,\int_T g^+(t)dt\right]\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

为 $f(t)=h(t)+ig(t)$ 在 T 上的积分。

根据此定义与闭复区间数的运算性质容易得到

定理 4.33　设 $f(t),g(t)$ 均是 T 上的复区间值函数,则有

(1)如果 $T=T_1\cup T_2$,且 $T_1\cap T_2=\varnothing$,则 $f(t)$ 在 T 上可积分当且仅当 $f(t)$ 在 T_1 与 T_2 上可积,并且

$$\int_T f(t)dt=\int_{T_1} f(t)dt+\int_{T_2} f(t)dt$$

(2)如果 $f(t),g(t)$ 均在 T 上可积,$f(t)\pm g(t)$ 在 T 上也可积,并且

$$\int_T [f(t)\pm g(t)]dt=\int_T f(t)dt\pm\int_T g(t)dt$$

(3)如果 $f(t)$ 在 T 上可积,k 为常复数,则 $kf(t)$ 在 T 上也可积,并且

$$\int_T kf(t)dt=k\int_T f(t)dt$$

(4)如果 $f(t),g(t)$ 都在 T 上可积,且对 $\forall\, t\in T$,恒有 $f(t)\supseteq g(t)$,则

$$\int_T f(t)dt\supseteq\int_T g(t)dt$$

4.4.2　多元复区间值函数的积分

我们仅讨论二元的情形,$n(\geqslant 3)$元的情形类似。

定义 4.25　设

$$\begin{aligned}f(t,\omega)&=h(t,\omega)+ig(t,\omega)\\&=[h^-(t,\omega),h^+(t,\omega)]+i[g^-(t,\omega),g^+(t,\omega)]\end{aligned}$$

是 $D=T\times\Omega$ 上的二元复区间值函数,如果 $h^-(t,\omega),h^+(t,\omega),g^-(t,\omega)$ 和 $g^+(t,\omega)$ 在 D 上均可积,则称 $f(t,\omega)=h(t,\omega)+ig(t,\omega)$ 在 D 上可积,并且称闭复区间数

$$\iint_D f(t,\omega)dtd\omega \triangleq \iint_D h(t,\omega)dtd\omega + i\iint_D g(t,\omega)dtd\omega$$

$$\triangleq [\iint_D h\ (t,\omega)dtd\omega, \iint_D h^{+}(t,\omega)dtd\omega]$$

$$+ i[\iint_D g^{-}(t,\omega)dtd\omega, \iint_D g^{+}(t,\omega)dtd\omega] \qquad (4.4.2)$$

为 $f(t,\omega)=h(t,\omega)+ig(t,\omega)$在 D 上的积分,n 元复区间值函数的积分可类似定义。

二元复区间值函数的积分与一元复区间值函数的积分有类似的性质,现叙述如下:

定理 4.34　设 $f(t,\omega),g(t,\omega)$都是区域 $D=T\times\Omega$ 上的二元复区间值函数,则有

(1)如果区域 D 可分为两个区域 D_1 与 D_2,则 $f(t,\omega)$在 D 上可积当且仅当$f(t,\omega)$在 D_1 与 D_2 上可积,并且

$$\iint_D f(t,\omega)dtd\omega = \iint_{D_1} f(t,\omega)dtd\omega + \iint_{D_2} f(t,\omega)dtd\omega$$

(2)如果 $f(t,\omega),g(t,\omega)$都在 D 上可积,则 $f(t,\omega)\pm g(t,\omega)$在 D 上也可积,并且

$$\iint_D (f(t,\omega) \pm g(t,\omega))dtd\omega = \iint_D f(t,\omega)dtd\omega \pm \iint_D g(t,\omega)dtd\omega$$

(3)如果 $f(t,\omega)$在 D 上可积,k 为常复数,则 $kf(t,\omega)$在 D 上也可积,并且

$$\iint_D kf(t,\omega)dtd\omega = k\iint_D f(t,\omega)dtd\omega$$

(4)如果 $f(t,\omega),g(t,\omega)$都在 D 上可积,且对 $\forall(t,\omega)\in D$,

恒有 $f(t,\omega)\subseteq g(t,\omega)$，则

$$\iint_D f(t,\omega)dtd\omega \subseteq \iint_D g(t,\omega)dtd\omega$$

4.4.3 一元复模糊集值函数的积分

定义 4.26 设 $\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\underset{\sim}{g}(t)$ 是复模糊集值函数，如果对 $\forall\alpha\in(0,1]$，$\underset{\sim}{f}(t)$ 的 α 水平复函数

$$f_\alpha(t)=h_\alpha(t)+ig_\alpha(t)=[h_\alpha^-(t),h_\alpha^+(t)]+i[g_\alpha^-(t),g_\alpha^+(t)]$$

在 T 上可积，则称 $\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\underset{\sim}{g}(t)$ 在 T 上可积，并且称

$$\begin{aligned}\int_T\underset{\sim}{f}(t)dt &\triangleq \int_T\underset{\sim}{h}(t)dt+i\int_T\underset{\sim}{g}(t)dt\\ &\triangleq \bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\int_T h_\alpha(t)dt+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\int_T g_\alpha(t)dt\\ &\triangleq \bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\int_T h_\alpha^-(t)dt,\int_T h_\alpha^+(t)dt\right]\\ &\quad + i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\int_T g_\alpha^-(t)dt,\int_T g_\alpha^+(t)dt\right] \qquad (4.4.3)\end{aligned}$$

为 $\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\underset{\sim}{g}(t)$ 在 T 上的积分。

此定义的合理性在于

定理 4.35 设 $\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\underset{\sim}{g}(t)$ 为复模糊集值函数，并且 $\underset{\sim}{f}(t)$ 在 T 上可积，则

(1) $\int_T\underset{\sim}{f}(t)dt=\int_T\underset{\sim}{h}(t)dt+i\int_T\underset{\sim}{g}(t)dt\in C_0^F(C)$

(2) 对 $\forall\alpha\in(0,1]$，

$$\left(\int_T\underset{\sim}{f}(t)dt\right)_\alpha=\int_T f_\alpha(t)dt=\int_T h_\alpha(t)dt+i\int_T g_\alpha(t)dt$$

$$= [\int_T h_\alpha^-(t)dt, \int_T h_\alpha^+(t)dt]$$

$$+ i[\int_T g_\alpha^-(t)dt, \int_T g_\alpha^+(t)dt]$$

复模糊集值函数的积分具有下列性质：

定理 4.36 设 $\underset{\sim}{A}(t),\underset{\sim}{B}(t)$均是 T 上的复模糊集值函数，则有

(1)如果 $T=T_1\cup T_2$，且 $T_1\cap T_2=\varnothing$，则 $\underset{\sim}{A}(t)$在 T 上可积当且仅当$\underset{\sim}{A}(t)$在 T_1 与 T_2 上可积，且

$$\int_T \underset{\sim}{A}(t)dt = \int_{T_1} \underset{\sim}{A}(t)dt + \int_{T_2} \underset{\sim}{A}(t)dt$$

(2) 如果 $\underset{\sim}{A}(t),\underset{\sim}{B}(t)$ 在 T 上可积，则 $\underset{\sim}{A}(t)\pm\underset{\sim}{B}(t)$ 在 T 上也可积，且

$$\int_T (\underset{\sim}{A}(t) \pm \underset{\sim}{B}(t))dt = \int_T \underset{\sim}{A}(t)dt \pm \int_T \underset{\sim}{B}(t)dt$$

(3) 如果 $\underset{\sim}{A}(t)$ 在 T 上可积，且 k 为常复数，则 $k\underset{\sim}{A}(t)$ 在 T 上也可积，且

$$\int_T k\underset{\sim}{A}(t)dt = k\int_T \underset{\sim}{A}(t)dt$$

(4) 如果 $\underset{\sim}{A}(t),\underset{\sim}{B}(t)$ 在 T 上可积，且对 $\forall t\in T$，恒有 $\underset{\sim}{A}(t)\subseteq\underset{\sim}{B}(t)$，则

$$\int_T \underset{\sim}{A}(t)dt \subseteq \int_T \underset{\sim}{B}(t)dt$$

4.4.4 多元复模糊集值函数的积分

定义 4.27 设 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)=\underset{\sim}{h}(t,\omega)+i\underset{\sim}{g}(t,\omega)$是定义在 $D=T\times\Omega$ 上的二元复模糊集值函数，如果对 $\forall\alpha\in(0,1]$，$\underset{\sim}{f}(t,\omega)$的 α

水平复函数

$$f_\alpha(t,\omega)=h_\alpha(t,\omega)+ig_\alpha(t,\omega)$$
$$=[h_\alpha^-(t,\omega),h_\alpha^+(t,\omega)]+i[g_\alpha^-(t,\omega),g_\alpha^+(t,\omega)]$$

在 $D=T\times\Omega$ 上可积，则称 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)=\underset{\sim}{h}(t,\omega)+i\underset{\sim}{g}(t,\omega)$ 在 $D=T\times\Omega$ 上可积，且称

$$\iint_D \underset{\sim}{f}(t,\omega)dtd\omega=\iint_D \underset{\sim}{h}(t,\omega)dtd\omega+i\iint_D \underset{\sim}{g}(t,\omega)dtd\omega$$
$$\triangleq\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\iint_D h_\alpha(t,\omega)dtd\omega$$
$$+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\iint_D g_\alpha(t,\omega)dtd\omega$$
$$=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\iint_D h_\alpha^-(t,\omega)dtd\omega,\iint_D h_\alpha^+(t,\omega)dtd\omega\right]$$
$$+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\iint_D g_\alpha^-(t,\omega)dtd\omega,\iint_D g_\alpha^+(t,\omega)dtd\omega\right] \tag{4.4.4}$$

为 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)=\underset{\sim}{h}(t,\omega)+i\underset{\sim}{g}(t,\omega)$ 在区域 D 上的积分，n 元复模糊集值函数的积分可以类似定义。

此定义的合理性在于

定理 4.37 设 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)=\underset{\sim}{h}(t,\omega)+i\underset{\sim}{g}(t,\omega)$ 为区域 D 上的二元复模糊集值函数，且 $\underset{\sim}{f}(t,\omega)$ 在 D 上可积，则

(1) $$\iint_D \underset{\sim}{f}(t,\omega)dtd\omega=\iint_D \underset{\sim}{h}(t,\omega)dtd\omega+i\iint_D \underset{\sim}{g}(t,\omega)dtd\omega\in C_0^F(C)$$

(2) 对 $\forall\alpha\in(0,1]$

$$
\begin{aligned}
(\iint_D \underset{\sim}{f}(t,\omega)dtd\omega)_\alpha &= \iint_D f_\alpha(t,\omega)dtd\omega \\
&= \iint_D h_\alpha(t,\omega)dtd\omega + i\iint_D g_\alpha(t,\omega)dtd\omega \\
&= [\iint_D h_\alpha^-(t,\omega)dtd\omega, \iint_D h_\alpha^+(t,\omega)dtd\omega] \\
&\quad + i[\iint_D g_\alpha^-(t,\omega)dtd\omega, \iint_D g_\alpha^+(t,\omega)dtd\omega]
\end{aligned}
$$

二元复模糊集值函数的积分与一元复模数集值函数的积分有完全类似的性质,现叙述如下。

定理 4.38 设 $\underset{\sim}{A}(t,\omega)$,$\underset{\sim}{B}(t,\omega)$均是 D 上的复模糊集值函数,则有

(1)如果 D 可分为两个区域 D_1 与 D_2,则 $\underset{\sim}{A}(t,\omega)$在 D 上可积当且仅当$\underset{\sim}{A}(t,\omega)$在 D_1 与 D_2 上可积,且

$$
\iint_D \underset{\sim}{A}(t,\omega)dtd\omega = \iint_{D_1} \underset{\sim}{A}(t,\omega)dtd\omega + \iint_{D_2} \underset{\sim}{A}(t,\omega)dtd\omega
$$

(2) 如果 $\underset{\sim}{A}(t,\omega)$,$\underset{\sim}{B}(t,\omega)$ 都在 D 上可积, 则 $\underset{\sim}{A}(t,\omega) \pm \underset{\sim}{B}(t,\omega)$ 在 D 上也可积,且

$$
\begin{aligned}
\iint_D (\underset{\sim}{A}(t,\omega) \pm \underset{\sim}{B}(t,\omega))dtd\omega &= \iint_D \underset{\sim}{A}(t,\omega)dtd\omega \\
&\quad \pm \iint_D \underset{\sim}{B}(t,\omega)dtd\omega
\end{aligned}
$$

(3) 如果 $\underset{\sim}{A}(t,\omega)$ 在 D 上可积,k 为常复数,则 $k\,\underset{\sim}{A}(t,\omega)$ 在 D 上也可积,且

$$
\iint_D k\,\underset{\sim}{A}(t,\omega)dtd\omega = k\iint_D \underset{\sim}{A}(t,\omega)dtd\omega
$$

(4) 如果 $\underset{\sim}{A}(t,\omega)$,$\underset{\sim}{B}(t,\omega)$ 都在 D 上可积,且对 $\forall (t,\omega) \in D$,恒有 $\underset{\sim}{A}(t,\omega) \subseteq \underset{\sim}{B}(t,\omega)$,则

$$\iint_D \underset{\sim}{A}(t,\omega)dtd\omega \subseteq \iint_D \underset{\sim}{B}(t,\omega)dtd\omega$$

§ 4.5 复 *Fuzzy* 测度与复 *Fuzzy* 积分

本节介绍内容参见文[38]

1 复 *Fuzzy* 测度

记 $\hat{R}^+ = [0,+\infty]$,$\hat{C}^+ = \{x+iy \mid x,y \in \hat{R}^+\}$.

定义 4.28 设 X 是非空集合,$\mathscr{A}$ 是 X 的子集组成的 σ-代数,称 $\mu:\mathscr{A} \to \hat{C}^+$ 为复 *Fuzzy* 测度,如果

(Ⅰ)$\mu(\varnothing)=0$;

(Ⅱ)若 $A \subset B$,则 $|\mu(A)| \leqslant |\mu(B)|$;

(Ⅲ)若 $\{A_n\}_1^\infty \uparrow$,则 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$;

(Ⅳ)若 $\{A_n\}_1^\infty \downarrow$ 且存在 n_0 使得 $|\mu(A_{n_0})| < +\infty$,则 $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$;

这里 $A,B,A_n \in \mathscr{A} (n=1,2\cdots)$

此时,称 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为复 *Fuzzy* 测度空间

定义 4.29 复 *Fuzzy* 测度 μ 称为零可加的,如果对于任意的 $E,F \in \mathscr{A}$,$E \cap F = \varnothing$ 且 $\mu(F)=0$,均有 $\mu(E \cap F) = \mu(E)$.

定义 4.30 设 $\lambda \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$,复 *Fuzzy* 测度 μ 称为 λ-可加的,如果对于任意的 $A,B \in \mathscr{A}$,$A \cap B = \varnothing$,均有 $\mu(A$

$\cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda\mu(A)\mu(B)$.

定义 4.31 复 *Fuzzy* 测度 μ 称为上自连续的，如果对于任意的 $A, B_n \in \mathscr{A}$ 且 $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$，均有 $\lim_{n\to\infty} \mu(A \cup B_n) = \mu(A)$.

定义 4.32 复 *Fuzzy* 测度 μ 称为下自连续的，如果对于任意的 $A, B_n \in \mathscr{A}$ 且 $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$，均有 $\lim_{n\to\infty} \mu(A - B_n) = \mu(A)$.

定义 4.33 复 *Fuzzy* 测度 μ 称为自连续的，当且仅当它既是上自连续又是下自连续的.

定义 4.34 称 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为上自连续、下自连续或自连续的复 *Fuzzy* 测度空间，如果复 *Fuzzy* 测度 μ 是上自连续、下自连续或自连续的.

定理 4.39 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为上自连续的复 *Fuzzy* 测度空间，则对于一切满足 $\mu(E_n) \to 0$ 的 $\{E_n\} \subset \mathscr{A}$，及任意的 $A \in \mathscr{A}$。

(1) 存在 $\{E_n\}$ 的子列的子列 $\{E_{n_i}^{(j)}\} \subset \{E_n\}$，使得 $\lim_{j\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^{(j)}) = 0$；

(2) $\lim_{j\to\infty} \mu[A \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^{(j)})] = \mu(A)$；

(3) 存在 $\{E_n\}$ 的子列 $\{E_{n_i}\} \subset \{E_n\}$，使得 $\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_{n_i}) = 0$；

(4) $\mu[A \cup (\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_{n_i}^{(j)})] = \mu(A)$.

证 (1) 因为 $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$，则对于 $\forall \varepsilon > 0$，一定存在自然数 n_1，使得 $|\mu(E_{n_1})| < \frac{\varepsilon}{2}$，又由于 μ 是上自连续的，因此对于固定的 E_{n_1}，有 $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n \cup E_j) = \mu(E_{n_1})$，于是存在自然数 n_2，使得 $|\mu(E_{n_1} \cup E_{n_2})| < |\mu(E_{n_1})| + \frac{\varepsilon}{2^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2}$，对于固定的 $E_{n_1} \cup E_{n_2}$，再

次利用 μ 的上自连续性，知一定存在自然数 n_3，使得 $|\mu(E_{n_1} \cup E_{n_2} \cup E_{n_3})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3}$，以此类推，由数学归纳法知，可选取 $\{E_{n_i}\} \subset \{E_n\}$，使得 $|\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^k} + \cdots = \varepsilon$.

特别，取 $\varepsilon = \frac{1}{j}$，可取 $\{E_{n_i}^{(j)}\} \subset \{E_n\}$，使得 $|\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^{(j)})| < \frac{1}{j}$，故 $\lim_{j \to \infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^{(j)}) = 0$. (2)因为 μ 是上自连续的，又 $\lim_{j \to \infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^{(j)}) = 0$，所以有 $\lim_{j \to \infty} \mu[A \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^{(j)})] = \mu(A)$.

(3)由于 $\mu(E_n) \to 0$，且若 $A \subset B$，则 $|\mu(A)| \leqslant |\mu(B)|$，故 $\{E_{n_i}^{(j)}\}$ 的选取可满足条件 $\{E_n\} \supset \{E_{n_i}^{(1)}\} \supset \{E_{n_i}^{(2)}\} \supset \cdots \supset \{E_{n_i}^{(j)}\} \supset \cdots$，令 $E_{n_i} = E_{n_i}^{(j)} (i = 1, 2 \cdots)$，于是 $\{E_{n_j}\}$ 是 $\{E_n\}$ 的子列，且 $\bigcup_{i=j}^{\infty} E_{n_i} \subset \bigcup_{i=j}^{\infty} E_{n_j}^{(j)} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_j}^{(j)} (j = 1, 2, \cdots)$，故有 $\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_{n_i}) = \lim_{j \to \infty} (\bigcup_{i=j}^{\infty} E_{n_i}) = 0$.

(4)因为 μ 上自连续，所以，易知 μ 零可加，故有 $\mu[A \cup (\bigcap_{j=1}^{\infty} \mu (\bigcup_{i=j}^{\infty} E_{n_i})] = \mu(A)$.　　证毕.

定理 4.40　设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为下自连续的复 *Fuzzy* 测度空间，则对于一切满足 $\mu(E_n) \to 0$ 的 $\{E_n\} \in \mathscr{A}$，及任意的 $A \in \mathscr{A}$.

(1)存在 $\{E_n\}$ 的子列的子列 $\{E_{n_i}^{(j)}\} \subset \{E_n\}$，使得 $\lim_{j \to \infty} \mu(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}) = \mu(A)$.

(2)存在 $\{E_n\}$ 的子列 $\{E_{n_i}\} \subset \{E_n\}$，使得 $\mu(A - \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_{n_i}) = \mu(A)$.

(证明与定理 4.39 的证明类似,略).

由定义 4.28 可以看出下面的命题显然成立.

命题 4.1 若 μ 是复 *Fuzzy* 测度,则 $|\mu|$ 为实 *Fuzzy* 测度,反之不然.

命题 4.2 若 μ 是上自连续、下自连续或自连续的复 *Fuzzy* 测度,则 $|\mu|$ 为相应的实 *Fuzzy* 测度,反之不然.

命题 4.3 若 μ_1 和 μ_2 都是实 *Fuzzy* 测度,那么 $\mu=\mu_1+i\mu_2$ 为复 *Fuzzy* 测度,反之不然.

命题 4.4 若 μ 为复 *Fuzzy* 测度,$|\mu|$ 为半可加($\frac{1}{2}$ - 可加)实 *Fuzzy* 测度,则

$$v=\frac{ln(1+2|\mu|)}{ln3-ln2}.$$

为半可加($\frac{1}{2}$ - 可加)概率测度.

命题 4.5 若 μ_1 和 μ_2 都是半可加 *Fuzzy* 测度,则 $\mu=\mu_1+i\mu_2$ 是半可加的复 *Fuzzy* 测度.

命题 4.6 若 μ_1 和 μ_2 都是概率测度,则

$$\mu=2[e^{ln\frac{3}{2}\mu_1}-1+i(e^{ln\frac{3}{2}\mu_2}-1)]$$

为半可加的复 *Fuzzy* 测度.

2 复 *Fuzzy* 可测函数

记 $\hat{R}^+=[0,+\infty]$, $C=\{x+iy|x,y\in R\}$.

定义 4.35 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为复 *Fuzzy* 测度空间,$f:X\to C$ 称为复 *Fuzzy* 可测函数,如果对 $\forall a+ib\in C$, $\{x\in X|Re[f(x)]\geq a, I_m[f(x)]\geq b\}\in\mathscr{A}$.

定义 4.36 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为复 Fuzzy 测度空间,$f_n(n=1,2,\cdots)$,$f:X\to\hat{C}$ 为复Fuzzy可测函数,以及$A\in\mathscr{A}$.

(1)称$\{f_n\}$在 A 上几乎处处收敛于f,如果存在 $E\in\mathscr{A}$,$\mu(E)=0$,使得$\{f_n\}$在 $A-E$ 上逐点收敛于f,记作 $f_n\to f\ a.e.$

(2)称$\{f_n\}$在 A 上的拟几乎处处收敛于f,如果存在 $F\in\mathscr{A}$,$\mu(A-F)=\mu(A)$,使得$\{f_n\}$在 $A-F$ 上逐点收敛于f,记作 $f_n\to f\ p.a.e.$

(3)称$\{f_n\}$在 A 上依(测度)μ 收敛于f,如果对于任意的 $\varepsilon>0$,均有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\mid|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}\cap A)=0,$$

记作 $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

(4)称$\{f_n\}$在 A 上拟依μ 收敛于f,如果对于任意的 $\varepsilon>0$,均有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\mid|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}\cap A)=\mu(A),$$

记作 $f_n\xrightarrow{p\mu}f$.

(5)称 f 是几乎处处有限的,如果

$$\mu(\{x\mid|f(x)|=\infty\})=0$$

定理 4.41 设 μ 是上自连续的复模糊测度,$A\in\mathscr{A}$,且$|\mu(A)|<\infty$,若可测函数列$\{f_n\}$在 A 上几乎处处收敛于几乎处处有限的可测函数f,则对于任意的 $\varepsilon>0$,一定存在 $E\in\mathscr{A}$,$|\mu(E)|<\varepsilon$,使得$\{f_n\}$在 $A-E$ 上逐点一致收敛于f.

证 因为μ 上自连续,所以 μ 零可加,即对于任意的 $E,F\in\mathscr{A}$,$E\cap F=\varnothing$,$\mu(F)=0$,有 $\mu(E\cup F)=\mu(E)$. 由于$\{f_n\}$在 A 上几乎处处收敛于几乎处处有限的可测函数,因此存在 $F\in\mathscr{A}$,μ

$(F)=0$,使得$\{f_n\}$在 $A-F$ 上逐点收敛于f,记 $A'=A-F$,此时由 μ 零可加易知,$\mu(A)=\mu(A'\cup F)=\mu(A')$.

令 $E_n^m=\bigcap_{i=n}^{\infty}\{x\mid |f_i-f|<\frac{1}{m}\}(m=1,2,\cdots)(n\in\mathbf{N})$,显然有 $E_1^m\subset E_2^m\subset E_3^m\subset\cdots$,而$\{f_n\}$在 A'上逐点收敛于f,故 $\underline{lim}_{n\to\infty}E_n^m\supset A$ 或$\underline{lim}_{n\to\infty}(A-E_n^m)=\varnothing$,又因为 μ 是上自连续的,所以 $\underline{lim}_{n\to\infty}\mu(A-E_m^n)=0$,于是存在 E_m^n,使得,$\mu(A-E_{n_m}^m)<\frac{1}{m}(m=1,2\cdots)$。若记 $F_m=A-E_{n_m}^m$,则 $\underline{lim}_{m\to\infty}\mu(F_m)=0$,由定理 4.39 知,对于任意的 $\varepsilon>0$,存在$\{F_m\}$的子列,使得 $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_{m_i})<\varepsilon$,令 $E'=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_{m_i}$,则 $E'\cup F\in\mathscr{A}$,且$|\mu(E'\cup F)|=|\mu(E')|<\varepsilon$,下面证明$\{f_n\}$在 $A-(E'\cup F)$上一致收敛于 f.

对于任意的 $\varepsilon'>0$,取 $k=m_{i_0}<\frac{1}{\varepsilon'}$,若 $x\in A'-F$,即 $x\in A'$ 但$x\overline{\in}F$,于是 $x\in A'$且$x\overline{\in}F_k$,由 F_k 的定义便知$x\in E_{m_k}^k$,从而 $x\in\bigcap_{i=n_k}^{\infty}\{x\mid |f_i-f|<\frac{1}{k}\}$,所以当 $i\geqslant k$ 且$x\in A'-E'$时,便有$|f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{k}<\varepsilon'$,亦即$\{f_n\}$在 $A'-E'$上逐点一致收敛于f。而 $A'-E'=(A-F)-E'=A-(E'\cup F)$,令 $E=E'\cup F$,则 $E\in\mathscr{A}$,$|\mu(E)|=|\mu(E')|<\varepsilon$,且$\{f_n\}$在 $A-E$ 上逐点一致收敛于 f. 证毕

定理 4.42 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为上自连续的复 *Fuzzy* 测度空间,$f_n\underset{\Longrightarrow}{\mu}f$,则一定存在$\{f_n\}$的子列$\{f_{n_i}\}$,使得 $f_{n_i}\to f.a.e.$

可以采用与普通可测情形完全类同的证明手法,便知以下命题的正确性(参见[34])。

命题 4.7 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是复 *Fuzzy* 测度空间；$\{f_n\}$为可测函数列，$\{g_n\}$也为可测函数列。

(1)若$\{f_n\}$在 A 上几乎处处收敛于几乎处处有限的可测函数 f，且$|\mu(A)|<\infty$，则$\{f_n\}$在 A 上必然依μ 收敛于f；

(2)若$\{f_n\}$在 A 上拟几乎处处收敛于拟几乎处处有限的可测函数f，则$\{f_n\}$在 A 上一定拟依μ 收敛于f；

(3)若 $f_n \underset{\Rightarrow}{\mu} f$，则 f 是复 *Fuzzy* 可测函数；

(4)若 $f_n \underset{\Rightarrow}{\mu} f$ 及 $f_n \underset{\Rightarrow}{\mu} h$，则 f 与 h 几乎处处相等；

(5)若 $f_n \underset{\Rightarrow}{\mu} f, g_n \underset{\Rightarrow}{\mu} g$，则对于任何有限复数 α,β，$\alpha f_n+\beta g_n \underset{\Rightarrow}{\mu} \alpha f+\beta g$；

(6)若 $f_n \underset{\Rightarrow}{\mu} f, g_n \underset{\Rightarrow}{\mu} g$，则 $f_n\cdot g_n \underset{\Rightarrow}{\mu} f\cdot g$；

(7)若 $f_n \underset{\Rightarrow}{\mu} f, g_n \underset{\Rightarrow}{\mu} g$，且 g_n 和 g 几乎处处不等于零，则 $f_n/g_n \underset{\Rightarrow}{\mu} f/g$.

3 复 *Fuzzy* 积分

定义 4.37 设 f 是从复 *Fuzzy* 测度空间$(X,\mathscr{A},\mu)$到 $\hat{C}^+$ 的复 *Fuzzy* 可测函数，$A\in\mathscr{A}$，则称

$$\int_A f d\mu \triangleq \sup_{\alpha\in[0,\infty)} min\{\alpha,\mu[N_\alpha(Ref)\cap A]\} + i\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\{\alpha, \mu[N_\alpha(Imf)\cap A]\}$$

为 f 关于μ 在A 上的复 *Fuzzy* 积分。

这里 $N_\alpha(Ref)=\{x\mid Re[f(x)]>\alpha\}$，$N_\alpha(Imf)=\{x\mid Im[f(x)]>\alpha\}$.

由定义 4.37 易知，复 *Fuzzy* 积分实际上就是将两类特殊的、成对出现的广义三角模 $s[x,y]=min(x,y)$和 $s[x,y]=xy$

意义之下的广义 *Fuzzy* 积分在复域上的推广。

定理 4.43　复 *Fuzzy* 积分具有以下性质：

(1)若 $f_1 \leqslant f_2$,则 $\left|\int_A f_1 d\mu\right| \leqslant \left|\int_A f_2 d\mu\right|$;

(2)若 $\mu(A) = 0$,则$\int_A f d\mu = 0$;

(3) $\int_A f d\mu = \int_X f \cdot X_{Re(f)} d\mu + i\int_X f \cdot X_{Im(f)} d\mu$;

(4) $A \subset B$,则 $\left|\int_A f d\mu\right| \leqslant \left|\int_B f d\mu\right|$;

(5) $max\left\{\left|\int_A f_1 d\mu\right| \vee \left|\int_A f_2 d\mu\right|\right\} \leqslant \left|\int_A (f_1 \vee f_2) d\mu\right|$;

(6) $\int_A (k \vee f) d\mu = \int_A k d\mu \vee \int_A f d\mu$,其中 $k \in (0,\infty)$.(证明是直接的,略).

定理 4.44　设 f_1 与 f_2 几乎处处相等,则

(1)若 μ 是上自连续的,那么$\int_A f_1 d\mu = \int_A f_2 d\mu$;

(2)若 μ 是下自连续的,那么$\int_A f_1 d\mu = \int_A f_2 d\mu$;

(3) $\int_X f_1 d\mu = \int_X f_2 d\mu$, 当且仅当 μ 是零可加的,(证明是直接的,略)。

由广义 *Fuzzy* 积分的收敛定理,可以推得以下命题。

命题 4.8　设 $f_n(n=1,2,\cdots)$,f 是从复 *Fuzzy* 测度空间$(X, \mathscr{A}, \mu)$到 $\hat{C}^+$ 的复 *Fuzzy* 可测函数,f 几乎处处有限,$f_n \underset{\Rightarrow}{\mu} f$, $A \in \mathscr{A}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$ 的充分必要条件是μ 自连续。

命题 4.9　设 $f_n(n=1,2,\cdots)$,f 是从复 *Fuzzy* 测度空间$(X,$

$\mathscr{A},\mu$)到 $\hat{C}^+$ 的复 *Fuzzy* 可测函数，$\{f_n\}$在 $A\in\mathscr{A}$ 上单调增加收敛于 f，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$。

§4.6 复模糊函数在光滑曲线上的积分

本节介绍内容参见[79].

下面引进复 *Fuzzy* 函数在光滑曲线上的积分概念并讨论其基本性质，为复 *Fuzzy* 分析的深入研究打下较好基础。

用 C 表示复数域并假设 C 具有通常的度量和范数及其生成的拓扑。用 $P_k(C)$表示 C 的所有非空紧凸子集组成的类。在 $P_k(C)$ 中按通常定义加法和标量积。用 h 表示 $P_k(C)$ 中的 *Hausdorff* 度量。用 $\overline{Z}$ 表示复 *Fuzzy* 集，其隶属函数记作 $\mu(z|\overline{Z})$。当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，$\overline{Z}$ 的 α－截集记作$[\overline{Z}]^\alpha=\{z\in C|\mu(z|\overline{Z})\geqslant\alpha\}$，特别记$[\overline{Z}]^0=cl(\bigcup\limits_{0<\alpha\leqslant 1}[\overline{Z}]^\alpha)$。

定义 4.38 称 $\overline{Z}$ 为复 *Fuzzy* 数，如果

（ⅰ）$\mu(z|\overline{Z})$上半连续；

（ⅱ）$[\overline{Z}]^\alpha$ 紧，孤连通且单连通，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$；

（ⅲ）$[\overline{Z}]^1$ 非空；

（ⅳ）$\overline{Z}$ 空格 *Fuzzy* 凸。

用 $\overline{C}$ 表示复 *Fuzzy* 数全体，对于任何 $\overline{Z}$、$\overline{W}\in\overline{C}$，记 $H(\overline{Z},\overline{W})=\sup\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}h([\overline{Z}]^\alpha,[\overline{W}]^\alpha)$，则$(\overline{C},H)$是完备的度量空间，简称为复 *Fuzzy* 数空间。

定理 4.45 如果 $\overline{Z}\in\overline{C}$，则

(1) $[\overline{Z}]^{\alpha}\in P_k(C), 0\leqslant\alpha\leqslant1$;

(2) $[\overline{Z}]^{\alpha_2}\subset[\overline{Z}]^{\alpha_1}, 0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant1$;

(3) 对于$[0,1]$中的数列$\{\alpha_n\}_1^{\infty}\nearrow\alpha\in(0,1]$,有$[\overline{Z}]^{\alpha}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[\overline{Z}]^{\alpha_n}$。

反之,若 C 中的子集族$\{A^{\alpha}|0\leqslant\alpha\leqslant1\}$满足(1)-(3),则存在惟一的复 *Fuzzy* 数$\overline{Z}\in\overline{C}$,使得$[\overline{Z}]^{\alpha}=A^{\alpha}, 0<\alpha\leqslant1$ 且$[\overline{Z}]^{0}=cl(\bigcup\limits_{0<\alpha\leqslant1}A^{\alpha})\subset A^{0}$。

定义 4.39 设 $D\subset C$,则称 $f:D\to\overline{C}$ 为复变量复 *Fuzzy* 数值函数,简称为复 *Fuzzy* 函数。

定义 4.40 设 $P_k(C)$具有由 *Hausdorff* 度量h 生成的拓扑,则称复 *Fuzzy* 函数 $f:D\to\overline{C}$ 是强可测的,如果对于所有的 $\alpha\in[0,1]$,由 $f_{\alpha}(z)=[f(z)]^{\alpha}$ 确定的集值映射$f_{\alpha}:D\to P_k(C)$是可测的,亦即对于任意的开集 $G\in\mathscr{A}$, $f_{\alpha}^{-1}(G)$为 *Lebesgue* 可测集。其中 $\mathscr{A}$是 $P_k(C)$中 *Hausdorff* 度量h 生成的拓扑。

定理 4.46 若复 *Fuzzy* 函数$f:D\to(\overline{C},H)$连续,则 f 是强可测的。

证明: 设 $z_0\in D$,因为 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in D}}H(f(z),f(z_0))=0$,所以对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $z\in D$ 且$|z-z_0|<\delta$ 时,有 $H(f(z),f(z_0))<\varepsilon$,由 H 的定义知,此时有 $h(f_{\alpha}(z),f_{\alpha}(z_0))<\varepsilon$, $\alpha\in[0,1]$,于是 $f_{\alpha}:D\to(P_k(C),h)$连续,所以对于任意的开集 $G\in(P_k(C),\mathscr{A})$,在复平面 C 中$f_{\alpha}^{-1}(G)$开,因此,$f_{\alpha}^{-1}(G)$ *Lebesgue* 可测。 证毕。

定义 4.41 设 $D\subset C$ 是有界闭区域,则称复 *Fuzzy* 函数,f:

$D \to \overline{C}$ 是积分有界的，如果存在复变函数 $h:D \to C$ 在 D 上(二重积分) *Lebesgue* 可积，且对于任意的 $z \in [f(z_0)]^0$，有 $|z| \leqslant |h(t_0)|$。

定义 4.42 设 $D \subset C$ 是有界闭区域，$l \subset D$ 是一条光滑的有向曲线，$f:D \to \overline{C}$ 是积分有界的，若 $[\int_l f(z)dz]^\alpha = \int_l [f(z)]^\alpha dz = \{\int_l g(z)dz \mid g(z) \in [f(z)]^\alpha$ 为可测选择函数$\}(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ 惟一确定一个复 *Fuzzy* 数 $\overline{W} \in \overline{C}$，则称 $f(z)$ 在 l 上可积，且称 $\overline{W}$ 为 $f(z)$ 在 l 上的积分，记作 $\int_l f(z)dz = \overline{W}$。

定理 4.47 设 $D \subset C$ 是有界闭区域，$l \subset D$ 是一条光滑的有向曲线。如果 $f:D \to \overline{C}$ 是积分有界且强可测的，则 $f(z)$ 在 l 上一定可积。

证明: 由集值映射理论易知，$\int_l [f(z)]^\alpha dz \in P_k(C), 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$。只须再证明 $[\int_l f(z)dz]^\alpha$ 满足定理 4.45 中的(2)(3)。

事实上，若 $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$，则对于任意的 $z \in D$，有 $[f(z)]^{\alpha_2} \subset [f(z)]^{\alpha_1}$，故有 $\int_l [f(z)]^{\alpha_2} dz \dot{\subset} \int_l [f(z)]^{\alpha_1} dz$。

$\{\alpha_n\}_1^\infty \subset [0,1]$ 且 $\alpha_n \nearrow \alpha \in (0,1]$，则对于任意的 $z \in D$，有 $\bigcap_{n=1}^\infty [f(z)]^{\alpha_n} = [f(z)]^\alpha$。由于 $[f(z)]^{\alpha_n}$ 均是紧集，所以 $\lim_{n \to \infty} h([f(z)]^{\alpha_n}, [f(z)]^\alpha) = 0$，又 $f(b)$ 积分有界且 $[f(z)]^{\alpha_n} \downarrow$，于是由集值映射的控制收敛定理知 $\lim_{n \to \infty} h(\int_l [f(z)]^{\alpha_n} dz, \int_l [f(z)]^\alpha dz) = 0$，故有

$$\int_l [f(z)]^\alpha dz = \bigcap_{n=1}^{\infty} \int_l [f(z)]^{\alpha_n} dz$$

定理 4.48 设 $D \subset C$ 是有界闭区域,$l \subset D$ 是一条光滑有向曲线。若 $f: D \to (\overline{C}, H)$连续,则 $f(z)$在 l 上一定可积。

证 因为对于任意的 $z \in D$,$f_0(z) = [f(z)]^0 \in P_k(C)$且 f_0 连续,又因为 D 紧,所以 $\bigcup_{z \in D} f_0(z)$紧,于是 f 积分有界,由定理 4.46 知 f 强可测,故由定理 4.47 知 $f(z)$在 l 上可积。证毕。

定理 4.49 若 $f(z)$在 $l = l_1 + l_2$ 上可积,则

$$\int_l f(z) dz = \int_{l_1} f(z) dz + \int_{l_2} f(z) dz.$$

证明 对于任意的 $\alpha \in [0,1]$,若 $g(z) \in [f(z)]^\alpha$ 为可测选择函数,则 $\int_l g(z) dz = \int_{l_1} g(z) dz + \int_{l_2} g(z) dz$,因此,显然有

$$\left[\int_l f(z) dz\right]^\alpha \subset \left[\int_{l_1} f(z) dz\right]^\alpha + \left[\int_{l_2} f(z) dz\right]^\alpha.$$

另一方面,令 $g_1(z)$和 $g_2(z)$分别是$[f(z)]^\alpha$ 在 l_1 和 l_2 上的可测选择函数,于是

$$g(z) = \begin{cases} g_1(z) & z \in l_1 \\ g_2(z) & z \in l_2 \end{cases}$$

是$[f(z)]^\alpha$ 在 l 上的可测选择函数,且有

$$\int_l g(z) dz = \int_{l_1} g_1(z) dz + \int_{l_2} g_2(z) dz。$$

所以 $\left[\int_{l_1} f(z) dz\right]^\alpha + \left[\int_{l_2} f(z) dz\right]^\alpha \subset \left[\int_l f(z) dz\right]^\alpha$

综上所述得 $\int_l f(z) dz = \int_{l_1} f(z) dz + \int_{l_2} f(z) dz$. 证毕.

定理 4.50 设 $D\subset C$ 是有界闭区域，$l\subset D$ 是一条光滑有向曲线，$f_1,f_2:D\to\overline{C}$ 在 l 上可积，$k\in C$，则

(Ⅰ) $\int_l[f_1(z)\pm f_2(z)]dz=\int_l f_1(z)dz\pm\int_l f_2(z)dz$;

(Ⅱ) $\int_l kf_1(z)dz=k\int_l f_1(z)dz$;

(Ⅲ) 若 f_1 关于 H 连续，则变上限的积分 $\int_{z_0}^{z}f_1(z)dz=G(z)$ (z_0 为 l 上的始点，$z\in l$) Lipschitz 连续；

(Ⅳ) $\int_l H(f_1(z),f_2(z))dz$ 存在，且 $H(\int_l f_1(z)dz,\int_l f_2(z)dz)\leqslant|\int_l H(f_1(z),f_2(z))dz|$.

证明： (Ⅰ)因为对于任何 $\alpha\in[0,1]$，有

$$\int_l[f_1(z)\pm f_2(z)]^\alpha dz=\int_l[f_1(z)]^\alpha\pm\int_l[f_2(z)]^\alpha dz$$

所以 $\int_l[f_1(z)\pm f_2(z)]dz=\int_l f_1(z)dz\pm\int_l f_2(z)dz$。

(Ⅱ)类似可证。

(Ⅲ)对于任何 $z_1,z_2\in l$，由定理 4.48 和定理 4.49 有

$$H(G(z_2),G(z_1))=H(\int_{z_1}^{z_2}f_1(z)dz,\hat{o})$$

其中 $\mu(z|\hat{o})=\begin{cases}1, z=0\\0, z\neq 0\end{cases}$

由 f_1 的连续性、$\bigcup_{z\in l}[f_1(z)]^0$ 的紧性及 H 的定义知，存在 $M>0$，使得

$$H(\int_{z_1}^{z_2}f_1(z)dz,\hat{o})\leqslant M|z_2-z_1|.$$

(Ⅳ) 设 $\{g_n^\alpha(z)\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{q_n^\alpha(z)\}_{n=1}^\infty$ 分别是 $[f_1(z)]^\alpha$ 和 $[f_2(z)]^\alpha$ 的可测函数列，且 $cl\{g_n^\alpha(z)\} = [f_1(z)]^\alpha$，和 $cl\{q_n^\alpha(z)\} = [f_2(z)]^\alpha$，令 $\{\alpha_m\}_{m-1}^\infty$ 是$[0,1]$ 的稠密子集，由 H 与 h 的定义易知

$$H(f_1(z), f_2(z)) = \sup_{m\geqslant 1} h([f_1(z)]^{\alpha_m}, [f_2(z)]^{\alpha_m})$$

可测。又因为 $H(f_1(z), f_2(z)) \leqslant H(f_1(z), \hat{o}) + H(f_2(z), \hat{o})$，而 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在 l 上可积，故 $H(f_1(z), f_2(z))$ 在 l 上也可积。

由集值映射的积分性质有

$$h(\int_l [f_1(z)]^\alpha dz, \quad \int_l [f_2(z)]^\alpha dz) \quad \leqslant | \quad \int_l h([f_1(z)]^\alpha, [f_2(z)]^\alpha) dz \; |,$$

故有 $\quad H[\int_l f_1(z) dz, \int_l f_2(z) dz) =$

$$\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} h[\int_l [f_1(z)]^\alpha dz, \int_l [f_2(z)]^\alpha dz)$$

$$\leqslant | \quad \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \int_l h([f_1(z)]^\alpha, \quad [f_2(z)]^\alpha) dz \quad | \leqslant | \quad \int_l H(f_1(z), f_2(z)) dz \; |。$$

第五章　模糊复级数

§5.1　*Fuzzy* 集序列的极限及其运算法则

本节介绍内容参见文[57].

定义 5.1.1　设 $A\subset X, A_n\subset X, (n=1,2,\cdots)$

(1)若 $\forall x\in X, x\in A\Leftrightarrow$ 存在自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$x\in A_n$ 恒成立，则称 A 为集合序列 $\{A_n\}$ 的下极限，记为 $A=\underline{lim}A_n$；

(2)若 $\forall x\in X, x\in A\Leftrightarrow$ 对任何自然数 N，总有 $n>N$ 时，使得 $x\in A_n$，则称 A 为集合序列 $\{A_n\}$ 的上极限，记为 $A=\overline{lim}A_n$；

(3)若 $\underline{lim}A_n=\overline{lim}A_n=A$，则称 A 为集合序列 $\{A_n\}$ 的极限，记为 $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

命题 5.1.1　设 $A_n\subset X, B_n\subset X, (n=1,2,\cdots)$，

(1) $\underline{lim}A_n=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}A_n$；$\overline{lim}A_n=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}A_n$；

(2)若自某自然数 N 以后，$A_n\subset B_n$ 恒成立，则 $\underline{lim}A_n\subset\underline{lim}B_n$；$\overline{lim}A_n\subset\overline{lim}B_n$；

(3) $\underline{lim}(A_n\cup B_n)\supset(\underline{lim}A_n)\cup(\underline{lim}B_n)$；$\underline{lim}(A_n\cap B_n)=(\underline{lim}A_n)\cap(\underline{lim}B_n)$；

$\overline{lim}(A_n\cup B_n)=(\overline{lim}A_n)\cup(\overline{lim}B_n)$；$\overline{lim}(A_n\cap B_n)\subset(\overline{lim}A_n)\cap(\overline{lim}B_n)$；

(4) $\underline{lim}A_n \subset \overline{lim}A_n$;

(5) 记 $A^c = \{x \mid x \notin A\}$，则 $(\underline{lim}A_n)^c = \underline{lim}A_n^c$；$(\overline{lim}A_n)^c = \overline{lim}A_n^c$；

(6) $\underline{lim}(A_n - B_n) \subset \underline{lim}A_n - \underline{lim}B_n$；$\overline{lim}(A_n - B_n) \subset \overline{lim}A_n$ $\overline{lim}B_n$；

(7) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$，$\lim\limits_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = A \cup B$；$\lim\limits_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = A \cap B$；

$\lim\limits_{n\to\infty}(A_n - B_n) = A - B$；$\lim\limits_{n\to\infty} A_n^c = A^c$.

该命题可由定义 5.1.1 直接验证

命题 5.1.2　设 $A_n \subset X$，$(n = 1, 2, \cdots)$，则 $\underline{lim}A_n$，$\overline{lim}A_n$ 均存在，且是惟一的。

该命题可由定义 5.1.1 结合反证法证之，从略。

定义 5.1.2　设 $R = (-\infty, +\infty)$，$A \subset R$，$B \subset R$，规定 A 与 B 的"$\underset{\sim}{*}$"运算(称为 *Fuzzy* 运算)为

$A \underset{\sim}{*} B = \{x * y \mid x \in A, y \in B\}$，

其中：(1) $*$ 表示"$+$、$-$、$\times$、$\div$、$\vee$、$\wedge$"运算之一；

(2) 在"$\underset{\sim}{\div}$"时，要求 $0 \notin B$；

(3) 若 A，B 中有一个为空集 $\varnothing$，则规定

$$A \underset{\sim}{*} B = \varnothing.$$

命题 5.1.3　设 $A, B, C \subset R$，则

(1) 当 $A \subset B$ 时，$A \underset{\sim}{*} C \subset B \underset{\sim}{*} C$；$C \underset{\sim}{*} A \subset C \underset{\sim}{*} B$

(2)$(A\cup B)\underset{\sim}{*}C=(A\underset{\sim}{*}C)\cup(B\underset{\sim}{*}C)$;

(3)$A\underset{\sim}{*}(B\cup C)=(A\underset{\sim}{*}B)\cup(A\underset{\sim}{*}C)$;

(4)$(A\cap B)\underset{\sim}{*}C\subset(A\underset{\sim}{*}C)\cap(B\underset{\sim}{*}C)$;

(5)$A\underset{\sim}{*}(B\cap C)=(A\underset{\sim}{*}B)\cap(A\underset{\sim}{*}C)$.

命题 5.1.4 设 $A_n\subset R, B_n\subset R, (n=1,2\cdots)$,则 $\underline{lim}(A_n\underset{\sim}{*}B_n)\supset(\underline{lim}A_n)\underset{\sim}{*}(\underline{lim}B_n)$.

证明 设 $z\in(\underline{lim}A_n)\underset{\sim}{*}(\underline{lim}B_n)$,则存在 $x\in\underline{lim}A_n$, $y\in\underline{lim}B_n$,使 $z=x*y$,由定义 5.1.1 可知存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,$x\in A_n$, $y\in B_n$,从而有 $z=x*y\in A_n\underset{\sim}{*}B_n$,即 $z\in\underline{lim}(A_n\underset{\sim}{*}B_n)$.证毕。

定义 5.1.3 设 $\underset{\sim}{A}\in F(X)$, $\underset{\sim}{B}\in F(X)$,

(1)若 $\forall x\in X$, $\underset{\sim}{A}(x)\leqslant\underset{\sim}{B}(x)$ 恒成立,则称 $\underset{\sim}{A}$ 小于 $\underset{\sim}{B}$,记为 $\underset{\sim}{A}\leqslant\underset{\sim}{B}$;

(2)若 $\forall x\in X$, $\underset{\sim}{A}(x)=\underset{\sim}{B}(x)$ 恒成立,则称 $\underset{\sim}{A}$ 等于 $\underset{\sim}{B}$,记为 $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$.

命题 5.1.5 设 $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in F(X)$,则

(1)$\underset{\sim}{A}\leqslant\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\forall\lambda\in(0,1]$, $A_\lambda\subset B_\lambda$.

(2)$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\forall\lambda\in(0,1]$, $A_\lambda=B_\lambda$;

该命题可由定义 5.1.3 及 λ - 截集的定义直接验证(略).

命题 5.1.6 设 $\underset{\sim}{A}\in F(X)$,则 $\underset{\sim}{A}$ 可表示为形式上的向量族 $\{(A_\lambda,\lambda)\mid\lambda\in(0,1]\}$,其中 A_λ 表示 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ 截集.

该命题可由 *Fuzzy* 集的分解定理及命题 5.1.4 来验证(略).

为叙述上方便,下面我们简记 *Fuzzy* 集 $\underset{\sim}{A}$ 为

$\underset{\sim}{A}=\{(A_\lambda,\lambda)\mid\lambda\in(0,1]\}$，且规定 A_0 表示 $\underset{\sim}{A}$ 的支集 $\{x\mid\underset{\sim}{A}(x)>0\}$.

命题 5.1.7 设 $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in F(X)$，则

(1) $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\{(A_\lambda\cup B_\lambda,\lambda)\mid\lambda\in(0,1]\}$;

(2) $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\{(A_\lambda\cap B_\lambda,\lambda)\mid\lambda\in(0,1]\}$.

其中：$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(x)=\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x)$，$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})(x)=\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(x)$

命题 5.1.8 设 $\underset{\sim}{A}^{(n)}\in F(X)$，$(n=1,2,\cdots)$，则 $\underline{lim}A_\lambda^{(n)}$，$\overline{lim}A_\lambda^{(n)}$ 关于 $0<\lambda\leqslant1$ 都是单调减少的集合套.

该命题可由 λ－截集的单调性及命题 5.1.1 直接验证。

定义 5.1.4 设 $\underset{\sim}{A}^{(n)}\in F(X)$，$(n=1,2,\cdots)$，记 $\underset{\sim}{A}^{(n)}=\{(\underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)},\lambda)\mid\lambda\in(0,1]\}$.

(1)称 $\{(\underline{lim}\,\underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)},\lambda)\mid\lambda\in(0,1]\}$ 为 *Fuzzy* 集序列 $\{\underset{\sim}{A}^{(n)}\}$ 的下极限，记为 $\underline{lim}\,\underset{\sim}{A}^{(n)}$;

(2)称 $\{(\overline{lim}\,\underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)},\lambda)\mid\lambda\in(0,1]\}$ 为 *Fuzzy* 集序列 $\{\underset{\sim}{A}^{(n)}\}$ 的上极限，记为 $\overline{lim}\,\underset{\sim}{A}^{(n)}$;

(3)若 $\forall\lambda\in(0,1]$，$\underline{lim}\,\underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)}=\overline{lim}\,\underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)}\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)}$，则称 $\{(\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)},\lambda)\mid\lambda\in(0,1]\}$ 为 *Fuzzy* 集序列 $\{\underset{\sim}{A}^{(n)}\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{A}^{(n)}$.

定理 5.1.1 设 $\underset{\sim}{A}^{(n)}\in F(X)$，$\underset{\sim}{B}^{(n)}\in F(X)$，$(n=1,2,\cdots)$，

(1) $\underline{lim}\,\underset{\sim}{A}^{(n)}\leqslant\overline{lim}\underset{\sim}{A}^{(n)}$;

(2)若自某自然数 N 以后，$\underset{\sim}{A}^{(n)}\leqslant\underset{\sim}{B}^{(n)}$ 恒成立，则 $\underline{lim}\underset{\sim}{A}^{(n)}\leqslant$

$\underline{\lim}\underset{\sim}{B}^{(n)}$；$\overline{\lim}\underset{\sim}{A}^{(n)} \leqslant \overline{\lim}\underset{\sim}{B}^{(n)}$；

(3) $\underline{\lim}(\underset{\sim}{A}^{(n)} \cup \underset{\sim}{B}^{(n)}) \geqslant (\underline{\lim}\underset{\sim}{A}^{(n)}) \cup (\underline{\lim}\underset{\sim}{B}^{(n)})$；$\underline{\lim}(\underset{\sim}{A}^{(n)} \cap \underset{\sim}{B}^{(n)}) = (\underline{\lim}\underset{\sim}{A}^{(n)}) \cap (\underline{\lim}\underset{\sim}{B}^{(n)})$；

$\overline{\lim}(\underset{\sim}{A}^{(n)} \cup \underset{\sim}{B}^{(n)}) = (\overline{\lim}\underset{\sim}{A}^{(n)}) \cup (\overline{\lim}\underset{\sim}{B}^{(n)})$；$\overline{\lim}(\underset{\sim}{A}^{(n)} \cap \underset{\sim}{B}^{(n)}) \leqslant (\overline{\lim}\underset{\sim}{A}^{(n)}) \cap (\overline{\lim}\underset{\sim}{B}^{(n)})$；

(4)若 $\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{A}^{(n)} = \underset{\sim}{A}$，$\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{B}^{(n)} = \underset{\sim}{B}$，则

$\lim\limits_{n \to \infty}(\underset{\sim}{A}^{(n)} \cup \underset{\sim}{B}^{(n)}) = \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$；

$\lim\limits_{n \to \infty}(\underset{\sim}{A}^{(n)} \cap \underset{\sim}{B}^{(n)}) = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$；

定理 5.1.2 设 $\{\underset{\sim}{A}^{(n)}\}$ 为单调 *Fuzzy* 集序列，则 $\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{A}^{(n)}$ 必定存在，并且，若记 $\underset{\sim}{A} \in F(X)$，$\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数为：$\underset{\sim}{A}(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{A}^{(n)}(x)$，那么

(1)当 $\{\underset{\sim}{A}^{(n)}\}$ 单调减少时，$\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{A}^{(n)} = \underset{\sim}{A}$；

(2)当 $\{\underset{\sim}{A}^{(n)}\}$ 单调增加时，$\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{A}^{(n)} \leqslant \underset{\sim}{A}$；$\lim\limits_{n \to \infty}(\underset{\sim}{A}^{(n)})^c = \underset{\sim}{A}^c$.

其中：$(\underset{\sim}{A}^{(n)})^c$，$\underset{\sim}{A}^c$ 分别表示 $\underset{\sim}{A}^{(n)}$，$\underset{\sim}{A}$ 的余集.

证明 由 $\{\underset{\sim}{A}^{(n)}\}$ 的单调性可知：$\forall \lambda \in (0,1]$，$\{\underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)}\}$ 是单调的经典集合序列，从而 $\lim\limits_{n \to \infty} A_\lambda^{(n)}$ 存在，利用定义 5.1.4 可知 $\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{A}^{(n)}$ 存在.

(1)由命题 5.1.5 可知，为证结论，仅需证 $\forall \lambda \in (0,1]$，$(\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{A}^{(n)})_\lambda = \underset{\sim}{A}_\lambda$ 即可.

事实上，$\forall \lambda \in (0,1]$，若 $x \in (\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{A}^{(n)})_\lambda$，则存在 N，当 $n \geqslant N$ 时，$x \in \underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)}$ 恒成立，即当 $n \geqslant N$ 时. $\underset{\sim}{A}^{(n)}(x) \geqslant \lambda$ 恒成立，从而

有 $A(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{A}^{(n)}(x)\geqslant\lambda$，$x\in A_\lambda$，反之，若 $x\in A_\lambda$，则由 $\{\underset{\sim}{A}^{(n)}(x)\}$是单调减少的数列及 $A(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{A}^{(n)}(x)$可知，对任何自然数 n，都有 $\underset{\sim}{A}^{(n)}(x)\geqslant\lambda$，即 $x\in A_\lambda^{(n)}$，$x\in\lim\limits_{n\to\infty}A_\lambda^{(n)}=(\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{A}^{(n)})_\lambda$，故$(\lim \underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)}=A_\lambda$.

(2) $\forall\lambda\in(0,1]$，若 $x\in(\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{A}^{(n)})_\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}A_\lambda^{(n)}$，则存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，$\underset{\sim}{A}^{(n)}(x)\geqslant\lambda$ 恒成立，从而有 $\underset{\sim}{A}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{A}^{(n)}(x)\geqslant\lambda$ 成立，即 $x\in A_\lambda$，利用命题 5.1.5 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{A}^{(n)}\leqslant A$. 由 $\{\underset{\sim}{A}^{(n)}\}$单调性可知$\{(\underset{\sim}{A}^{(n)})^c\}$单调减，利用(1)可知，$\forall x\in X$，有

$$(\lim_{n\to\infty}(\underset{\sim}{A}^{(n)})^c)(x)=\lim_{n\to\infty}(\underset{\sim}{A}^{(n)})^c(x)=\lim_{n\to\infty}(1-\underset{\sim}{A}^{(n)}(x))$$
$$=1-\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{A}^{(n)}(x)=1-\underset{\sim}{A}(x)=\underset{\sim}{A}^c(x),$$

故 $\quad\lim\limits_{n\to\infty}(\underset{\sim}{A}^{(n)})^c=\underset{\sim}{A}^c$.（证毕）

推论 设$\{\underset{\sim}{A}^{(n)}\}$为单调增序列，$\underset{\sim}{A}\in F(X)$，$\underset{\sim}{A}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(\underset{\sim}{A}^{(n)})(x)$，则 $\forall\lambda\in(0,1]$，

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset(\lim_{n\to\infty}(\underset{\sim}{A}^{(n)}))_\lambda\subset A_\lambda;$$

其中

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\{x\mid\underset{\sim}{A}(x)>\lambda\}.$$

该推论可由定理 5.1.2 的(2)及 $\underset{\sim}{A}$ 的定义直接验证(略).

定义 5.1.5 设 $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in F(R)$，$k\in R$，规定

(1) k 与 $\underset{\sim}{A}$ 的乘积为：$k\underset{\sim}{A}=\{(kA_\lambda,\lambda)\mid\lambda\in(0,1]\}$，其中：$kA_\lambda=\{kx\mid x\in A_\lambda\}$，且 $k\varnothing=\varnothing$.

(2) $\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{B} = \{(A_\lambda \underset{\sim}{*} B_\lambda, \lambda) \mid \lambda \in (0,1]\}$

其中：$*$ 表示“$+$、$-$、$\times$、$\div$、$\vee$、$\wedge$”运算之一，且在“$\underset{\sim}{\div}$”时，要求 $0 \notin B_0 = \{x \mid \underset{\sim}{B}(x) > 0\}$.

命题 5.1.9 设 $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in F(R), k \in R$，则

(1) $k(\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{B}) = (k\underset{\sim}{A}) \underset{\sim}{*} (k\underset{\sim}{B})$，其中：$*$ 表示“$+$、$-$、$\times$、$\div$、$\vee$、$\wedge$”运算之一；

(2) $k(\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\times} \underset{\sim}{B}) = (k\underset{\sim}{A}) \underset{\sim}{\times} \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\times} (k\underset{\sim}{B})$；

(3) $k(\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\div} \underset{\sim}{B}) = (k\underset{\sim}{A}) \underset{\sim}{\div} \underset{\sim}{B}$.

该命题可由定义 5.1.5 直接验证.

命题 5.1.10 设 $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C} \in F(R)$，则

(1) 当 $\underset{\sim}{A} \leqslant \underset{\sim}{B}$ 时，$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C} \leqslant \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C}$；$\underset{\sim}{C} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{A} \leqslant \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{B}$；

(2) $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C} = (\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C}) \cup (\underset{\sim}{B} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C})$；

(3) $\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C})$；

(4) $(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C} \leqslant (\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C}) \cap (\underset{\sim}{B} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C})$；

(5) $\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) \leqslant (\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C})$；

(6) $\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{A}$；$(\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{B}) \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} (\underset{\sim}{B} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C})$.

其中：$*$ 表示“$+$、$-$、$\times$、$\div$、$\vee$、$\wedge$”运算之一.

证明 下面仅给出(2)的验证过程，其余的可仿此类似证明.

(2) $\forall \lambda \in (0,1]$,

$$\begin{aligned}[(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C}]_\lambda &= (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})_\lambda \underset{\sim}{*} C_\lambda \\ &= (A_\lambda \cup B_\lambda) \underset{\sim}{*} C_\lambda = (A_\lambda \underset{\sim}{*} C_\lambda) \cup (B_\lambda \underset{\sim}{*} C_\lambda) \\ &= (\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C})_\lambda \cup (\underset{\sim}{B} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C})_\lambda = [(\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C}) \cup (\underset{\sim}{B} \underset{\sim}{*} \underset{\sim}{C})]_\lambda,\end{aligned}$$

由命题 5.1.5 可知

$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\underset{\sim}{*}\underset{\sim}{C}=(\underset{\sim}{A}*\underset{\sim}{C})\cup(\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{*}\underset{\sim}{C})$. 证毕.

定理 5.1.3 $\underset{\sim}{A}^{(n)},\underset{\sim}{B}^{(n)}\in F(R),k\in R,k\neq 0$,则

(1) $\underline{lim}(\underset{\sim}{A}^{(n)}\underset{\sim}{*}\underset{\sim}{B}^{(n)})\geqslant(\underline{lim}\underset{\sim}{A}^{(n)})*(\underline{lim}\underset{\sim}{B}^{(n)})$;

(2) $\underline{lim}(k\underset{\sim}{A}^{(n)})=k\ \underline{lim}(\underset{\sim}{A}^{(n)})$;

(3) $\overline{lim}(k\underset{\sim}{A}^{(n)})=k\ \overline{lim}(\underset{\sim}{A}^{(n)})$;

证明 (1) $\forall\lambda\in(0,1],[\underline{lim}(\underset{\sim}{A}^{(n)}\underset{\sim}{*}\underset{\sim}{B}^{(n)})]_\lambda=\underline{lim}(\underset{\sim}{A}^{(n)}\underset{\sim}{*}\underset{\sim}{B}^{(n)})_\lambda$

$\supset(\underline{lim}(\underset{\sim}{A}^{(n)})_\lambda)\underset{\sim}{*}(\underline{lim}(\underset{\sim}{B}^{(n)})_\lambda)=[\underline{lim}(\underset{\sim}{A}^{(n)})\underset{\sim}{*}(\underline{lim}\underset{\sim}{B}^{(n)})]_\lambda$.

故 $\underline{lim}(\underset{\sim}{A}^{(n)}\underset{\sim}{*}\underset{\sim}{B}^{(n)})\geqslant(\underline{lim}\underset{\sim}{A}^{(n)})\underset{\sim}{*}(\underline{lim}\underset{\sim}{B}^{(n)})$.

(2) $\forall\lambda\in(0,1],[\underline{lim}(k\underset{\sim}{A}^{(n)})]_\lambda=\underline{lim}(k\underset{\sim}{A}^{(n)})_\lambda=\underline{lim}(k\underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)})$.

若 $x\in[\underline{lim}(k\underset{\sim}{A}^{(n)})]_\lambda$,则存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,$x\in A_\lambda^{(n)}$,即存在 $y\in k\underset{\sim}{A}^{(n)}$,使 $x=ky$,从而 $y\in[\underline{lim}\underset{\sim}{A}^{(n)}]_\lambda$,$x=ky\in k(\underline{lim}\underset{\sim}{A}^{(n)})_\lambda=k(\underline{lim}\underset{\sim}{A}^{(n)})_\lambda=[k\ \underline{lim}\underset{\sim}{A}^{(n)}]_\lambda$;反之,若 $x\in[k(\underline{lim}\underset{\sim}{A}^{(n)})]_\lambda$,则存在 $y\in\underline{lim}A_\lambda^{(n)}$,使 $x=ky$,即存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,$y\in\underline{lim}A_\lambda^{(n)}$,从而有 $x=ky\in A_\lambda^{(n)}$,$x\in\underline{lim}(k\ A_\lambda^{(n)})=[k(\underline{lim}\underset{\sim}{A}^{(n)})]_\lambda$.

故 $[k(\underline{lim}\underset{\sim}{A}^{(n)})]_\lambda=[(\underline{lim}k\underset{\sim}{A}^{(n)})]_\lambda$,由命题 5.1.4 可知:$\underline{lim}(k\underset{\sim}{A}^{(n)})=k(\underline{lim}\underset{\sim}{A}^{(n)})$.

(3)可与(2)类似证之(略).(证毕)

§5.2　实 *Fuzzy* 数序列的收敛性

定义 5.2.1　设 $\underset{\sim}{a}\in F(R)$,若 $\underset{\sim}{a}$ 具有性质

(i) $\underset{\sim}{a}$ 是正规的,即 $\exists\, x\in R$,使 $\underset{\sim}{a}(x)=1$.

(ii) $\forall\lambda\in(0,1]$,$\underset{\sim}{a}$ 的截集 $a_\lambda=\{x;\underset{\sim}{a}(x)\geqslant\lambda\}$是闭区间。记作 $a_\lambda=[a_\lambda^-,a_\lambda^+]$.

称则 $\underset{\sim}{a}$ 为 *Fuzzy* 数,R 上的 *Fuzzy* 数的全体记作 $F^*(R)$,又若 $\forall\lambda\in(0,1]$,$0<a_\lambda^-\leqslant a_\lambda^+$ ($a_\lambda^-\leqslant a_\lambda^+<0$),则称 $\underset{\sim}{a}$ 为正(负)*Fuzzy* 数,R 上正 *Fuzzy* 数的全体记作 $F^*(R^+)$,R 上负 *Fuzzy* 数的全体记作 $F^*(R^-)$.

$\forall a\in R$,规定 $a(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x=a \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x\neq a \text{ 时}\end{cases}$　则 $a\in F^*(R)$

由分解定理,$\forall\underset{\sim}{a}\in F^*(R)$

$$\underset{\sim}{a}=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda[a_\lambda^-,a_\lambda^+]$$

定义 5.2.2　映射 $\tilde{\rho}:(F(R),F(R))\to F(R)$称为一个 *Fuzzy* 距离,如果

(1) $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\geqslant 0$,$\tilde{a}=\tilde{b}$ 的充要条件为 $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})=0$;

(2) $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})=\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{a})$;

(3)对任何 $\tilde{c}\in F(R)$,有

$$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{c})+\tilde{\rho}(\tilde{c},\tilde{b}).$$

如果 $\tilde{\rho}$ 是 *Fuzzy* 数的 *Fuzzy* 距离，则称$(R,F(R),\tilde{\rho})$是一个 *Fuzzy* 度量空间.

定义 5.2.3 对任何 $\tilde{a},\tilde{b}\in F(R)$，我们定义

$$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[|a_1^- - b_1^-|,\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_\eta^- - b_\eta^-|\vee|a_\eta^+ - b_\eta^+|]$$

其中 $\vee = max\{a,b\}$，a、$b\in R$.

定理 5.2.1 由定义 5.2.3 定义的 $\tilde{\rho}$ 是一个 *Fuzzy* 数的 *Fuzzy* 距离.

容易看到，如果 a,b 为实数，则 $\tilde{\rho}(a,b)=|a-b|$。

定义 5.2.4 设$\{\tilde{a}_n\}\subset F(R)$，$\tilde{a}\in F(R)$，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，成立

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})<\varepsilon$$

则称$\{\tilde{a}_n\}$收敛于 $\tilde{a}$，记为

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a} \text{ 或 } \tilde{a}_n\xrightarrow{(\tilde{\rho})}\tilde{a}(n\to\infty).$$

定理 5.2.2 设$\{\tilde{a}_n\}\subset F(R)$，$\tilde{a}\in F(R)$，则$\{\tilde{a}_n\}$收敛于 $\tilde{a}$ 的充要条件是$\{a_{n_\lambda}^-\}$，$\{a_{n_\lambda}^+\}$对任何 $\lambda\in(0,1]$分别一致收敛于 a_λ^-，a_λ^+.

定理 5.2.3 设$\{\tilde{a}_n\}$，$\{\tilde{b}_n\}\subset F(R)$，$\tilde{a},\tilde{b}\in F(R)$，$a\in R$,，如果$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$，$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$，则

(1)$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\tilde{a}_n+\tilde{b}_n)=\tilde{a}+\tilde{b}$;

(2) $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}(\tilde{a}_n - \tilde{b}_n) = \tilde{a} - \tilde{b}$;

(3) $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}(a\cdot\tilde{a}_n) = a\cdot\tilde{a}$.

以上内容参见[46].

定理 5.2.4(柯西准则) 设$\{\underset{\sim}{a}_n\}\subset F^*(R)$,则$\{\underset{\sim}{a}_n\}$收敛的充要条件是$\forall\varepsilon>0$,存在$N>0$,当$n\geqslant N$时,对任意自然数$p$,成立$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{a}_{n+p},\underset{\sim}{a}_n)<\varepsilon$。

证明:由于$\{\underset{\sim}{a}_n\}$收敛的充要条件是$\forall\lambda\in(0,1]$,$\{a_{n_\lambda}^-\}$,$\{a_{n_\lambda}^+\}$分别一致收敛,$\{a_{n_\lambda}^-\}$,$\{a_{n_\lambda}^+\}$分别一致收敛的充要条件是$\forall\varepsilon>0$,存在$N>0$,当$n>N$时,对于任意自然数p,$\forall\lambda\in(0,1]$,都有

$$|a_{n_\lambda}^- - a_{(n+p)_\lambda}^-|<\varepsilon,\ |a_{n_\lambda}^+ - a_{(n+p)_\lambda}^+|<\varepsilon$$

即$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{a}_n,\underset{\sim}{a}_{n+p})<\varepsilon$(证毕).

定义 5.2.5 设$\{\tilde{a}_n\}\subset F^*(R)$,若

$$\underset{\sim}{a}_1\leqslant\underset{\sim}{a}_2\leqslant\cdots\leqslant\underset{\sim}{a}_n\leqslant\cdots(\underset{\sim}{a}_1\geqslant\underset{\sim}{a}_2\geqslant\cdots\geqslant\underset{\sim}{a}_n\geqslant\cdots)$$

则称 *Fuzzy* 数序列 *Fuzzy* 单调增加(减少),简称$\{\underset{\sim}{a}_n\}$单调增加(减少).

定理 5.2.5(单调有界定理) 若 *Fuzzy* 数序列$\{\underset{\sim}{a}_n\}$是单调有界的,则 *Fuzzy* 数序列$\{\underset{\sim}{a}_n\}$收敛。当$\{\underset{\sim}{a}_n\}$是单调增加的,则$\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{a}_n=\underset{\sim}{M}-\sup\limits_n\{\underset{\sim}{a}_n\}=\bigcup\limits_{\lambda\in(0,1]}\lambda[\sup\limits_n a_{n_\lambda}^-,\sup\limits_n a_{n_\lambda}^+]$;当$\{\underset{\sim}{a}_n\}$是单调减少的,则$\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{a}_n=\underset{\sim}{M}=\inf\limits_n\{\underset{\sim}{a}_n\}=\bigcup\limits_{\lambda\in(0,1]}\lambda[\inf\limits_n a_{n_\lambda}^-,\inf\limits_n a_{n_\lambda}^+]$.

证明 不妨设$\{\underset{\sim}{a}_n\}$单调增加,即

$$\underset{\sim}{a}_1 \leqslant \underset{\sim}{a}_2 \leqslant \cdots \leqslant \underset{\sim}{a}_n \leqslant \cdots$$

又$\{\underset{\sim}{a}_n\}$有界,由文[46]知,$\{\underset{\sim}{a}_n\}$存在上确界 $\underset{\sim}{M} = \sup_n \{\underset{\sim}{a}_n\} = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda [\sup_n a_{n_\lambda}^-, \sup_n a_{n_\lambda}^+]$,由上确界的定义

(i) $\underset{\sim}{a}_n \leqslant \sup_n \underset{\sim}{a}_n = \underset{\sim}{M} \qquad n = 1, 2, \cdots$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,使 $\underset{\sim}{M} < \underset{\sim}{a}_N + \varepsilon$

即 $$\underset{\sim}{M} = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda [\sup_n a_{n_\lambda}^-, \sup_n a_{n_\lambda}^+]$$

$$\leqslant \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda [a_{N_\lambda}^-, a_{n_\lambda}^+] + \varepsilon = \underset{\sim}{a}_N + \varepsilon$$

所以当 $n \geqslant N$ 时,

$$\underset{\sim}{a}_n \leqslant \underset{\sim}{M} \leqslant \underset{\sim}{a}_N + \varepsilon \leqslant \underset{\sim}{a}_n + \varepsilon$$

所以 $\tilde{\rho}(\underset{\sim}{a}_n, \underset{\sim}{M}) < \varepsilon$,即 $\lim_{n \to \infty} \underset{\sim}{a}_n = \underset{\sim}{M}$.

同理可证,当$\{\underset{\sim}{a}_n\}$单调减少时,$\lim_{n \to \infty} \underset{\sim}{a}_n = \underset{\sim}{M}$.　　证毕.

规定当 $\forall \lambda \in (0,1]$,$\lim_{n \to \infty} a_{n_\lambda}^- = \lim_{n \to \infty} a_{n_\lambda}^+$一致收敛于 0,$\lim_{n \to \infty} \underset{\sim}{a}_n = 0$.

§ 5.3　实 Fuzzy 数项级数概念及性质

定义 5.3.1　设$\{\underset{\sim}{a}_n\} \subset F^*(R)$

$$\underset{\sim}{a}_1 + \underset{\sim}{a}_2 + \cdots + \underset{\sim}{a}_n + \cdots \quad 或 \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a}_n$$

称为实 Fuzzy 数的 Fuzzy 级数,简称 Fuzzy 级数,称 $\underset{\sim}{S}_n = \underset{\sim}{a}_1 + \underset{\sim}{a}_2 + \cdots + \underset{\sim}{a}_n$ 为 Fuzzy 级数的 n 项部分 Fuzzy 和,简称$\{\underset{\sim}{S}_n\}$为 Fuzzy 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a}_n$ 的部分和序列。

定义 5.3.2 若实 Fuzzy 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 的部分和序列 $\{\underset{\sim}{S_n}\}$ 收敛,并设为

$$\lim_{n\to\infty} \underset{\sim}{S_n} = \underset{\sim}{S}$$

则称实 Fuzzy 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 收敛于Fuzzy 数 $\underset{\sim}{S}$,$\underset{\sim}{S}$ 称为Fuzzy 级数的Fuzzy 和,记作 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n} = \underset{\sim}{S}$,否则称实 Fuzzy 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 发散。

定义 5.3.3 若 Fuzzy 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 收敛,其 Fuzzy 和为 $\underset{\sim}{S}$,而 $\underset{\sim}{S} - \underset{\sim}{S_n}$ 表为 $\underset{\sim}{\gamma_n}$,即

$$\underset{\sim}{\gamma_n} = \underset{\sim}{S} - \underset{\sim}{S_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_k} - \sum_{k=1}^{n} \underset{\sim}{a_k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \underset{\sim}{a_k}$$

称为收敛 Fuzzy 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 的 n 项Fuzzy 余和,简称 Fuzzy 余和,并记

$$\lim_{n\to\infty} \underset{\sim}{\gamma_n} = \lim_{n\to\infty} (\underset{\sim}{S} - \underset{\sim}{S_n}) = 0.$$

定义 5.3.4 若 $\{\underset{\sim}{a_n}\} \subset F^*(R^+)$,则称 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 为Fuzzy 正项级数,若 $\{\underset{\sim}{a_n}\} \subset F^*(R^-)$,则称 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 为Fuzzy 负项级数.

定理 5.3.1 实 Fuzzy 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 收敛于 $\underset{\sim}{S} \Leftrightarrow \forall \lambda \in (0,1]$,$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_\lambda}^-$,$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_\lambda}^+$ 分别一致收敛于 S^-,S^+,且

$$\underset{\sim}{S} = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_\lambda}^-, \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_\lambda}^+\right] = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda[S^-, S^+]$$

证明 令 $\underset{\sim}{S_n} = \underset{\sim}{a_1} + \underset{\sim}{a_2} + \cdots + \underset{\sim}{a_n}$, $n = 1,2,\cdots$

我们知道 $\{\underset{\sim}{S_n}\}$ 收敛于 $\underset{\sim}{S} = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda[S^-, S^+]$ 的充要条件是 $\forall \lambda \in$

$(0,1]$，$\{S_{n_\lambda}^-\}$，$\{S_{n_\lambda}^+\}$分别一致收敛于 S^-, S^+，于是

$$\lim_{n\to\infty} \underset{\sim}{S_n} = \underset{\sim}{S} = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda[S^-, S^+]$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n} = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda[S^-, S^+] = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda[\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_\lambda}^-, \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_\lambda}^+]$. 证毕.

定理 5.3.2(柯西准则) 实 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 收敛的充要条件是 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n \geqslant N$，对于任意的自然数 p，有

$$\tilde{\rho}(\sum_{k=1}^{n+p} \underset{\sim}{a_k}, \sum_{k=1}^{n} \underset{\sim}{a_k}) < \varepsilon.$$

证明 设 $\underset{\sim}{S_n} = \sum_{k=1}^{n} \underset{\sim}{a_k}$，$n = 1, 2, \cdots$，由定理 5.2.4 知 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 收敛的充要条件是 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 部分和 $\{\underset{\sim}{S_n}\}$ 收敛$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，对于任意自然数 p，有 $\underset{\sim}{\rho}(\underset{\sim}{S_{n+p}}, \underset{\sim}{S_n}) < \varepsilon$

即 $\tilde{\rho}(\sum_{k=1}^{n+p} \underset{\sim}{a_k}, \sum_{k=1}^{n} \underset{\sim}{a_k}) < \varepsilon$. 证毕.

定理 5.3.3 (收敛惟一性定理)

如果实 *Fuzzy* 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 收敛于 $\underset{\sim}{a}$，又收敛于 $\underset{\sim}{b}$ 则 $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{b}$.

证明 设 $\underset{\sim}{S_n} = \underset{\sim}{a_1} + \underset{\sim}{a_2} + \cdots + \underset{\sim}{a_n}$，因为 *Fuzzy* 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 收敛于 $\underset{\sim}{a}$，又收敛于 $\underset{\sim}{b}$ 所以有

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty} \underset{\sim}{S_n} = \underset{\sim}{a} \text{ 及 } (\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty} \underset{\sim}{S_n} = \underset{\sim}{b}.$$

因此，对任给的 $\varepsilon > 0$，总存在 $N_1 > 0, N_2 > 0$，使得当 $n \geqslant N_1$ 时

$$\underset{\sim}{\rho}(\underset{\sim}{S_n}, \underset{\sim}{a}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

及当 $n \geqslant N_2$ 时

$$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{S_n}, \underset{\sim}{b}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N = max\{N_1, N_2\}$，则当 $n \geqslant N$ 时，有

$$0 \leqslant \tilde{\rho}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) \leqslant \tilde{\rho}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{S_n}) + \tilde{\rho}(\underset{\sim}{S_n}, \underset{\sim}{b}) = \tilde{\rho}(\underset{\sim}{S_n}, \underset{\sim}{a})) + \underset{\sim}{\rho}(\underset{\sim}{S_n}, \underset{\sim}{b}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即 $\underset{\sim}{\rho}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = 0$

亦即 $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{b}$. 证毕.

定理 5.3.4 设 $\alpha, \beta \in R$，若实 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 与实 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{b_n}$ 均收敛，则 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha \underset{\sim}{a_n} + \beta \underset{\sim}{b_n})$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha \underset{\sim}{a_n} + \beta \underset{\sim}{b_n}) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{b_n}$$

定理 5.3.5 实 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 中去掉、增加或改变 *Fuzzy* 级数的有限项并不改变其 *Fuzzy* 级数的敛散性。

§5.4 实 *Fuzzy* 数项级数收敛性判别法则

定理 5.4.1 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$ 为实 *Fuzzy* 正项级数，则 *Fuzzy* 级数收敛的充要条件是 *Fuzzy* 级数的部分和序列 $\{\underset{\sim}{S_n}\}$ 有界.

定理 5.4.2(比较原则) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{b_n}$ 为两个实 *Fuzzy* 正项级数，且存在 $N > 0$，当 $n \geqslant N$ 时，有

$\underset{\sim}{a}_n \leqslant \underset{\sim}{b}_n$

(1)若 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{b}_n$ 收敛,则 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a}_n$ 收敛;

(2)若 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a}_n$ 发散,则 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{b}_n$ 也发散.

证明 根据定理 5.3.5 改变 *Fuzzy* 级数前面有限项并不改变级数的敛散性,因此不妨设 $\forall n \in N$,有

$\underset{\sim}{a}_n \leqslant \underset{\sim}{b}_n$

设 $\underset{\sim}{A}_n = \underset{\sim}{a}_1 + \underset{\sim}{a}_2 + \cdots + \underset{\sim}{a}_n$, $\underset{\sim}{B}_n = \underset{\sim}{b}_1 + \underset{\sim}{b}_2 + \cdots + \underset{\sim}{b}_n$,则

$\underset{\sim}{A}_n \leqslant \underset{\sim}{B}_n$.

(1)若 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{b}_n$ 收敛,则 $\{\underset{\sim}{B}_n\}$ 有界,从而 $\{\underset{\sim}{A}_n\}$ 也有界,由定理 5.4.1 知 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a}_n$ 收敛.

(2)假设 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{b}_n$ 收敛,则 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a}_n$ 也收敛,与题设矛盾,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{b}_n$ 发散.证毕.

定理 5.4.3 设 $\underset{\sim}{a}_n \in F^*(R^+)$, $n = 1,2,\cdots$,若 $\{\underset{\sim}{a}_n\}$ 单调减少,且 $\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{a}_n = 0$,则 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underset{\sim}{a}_n$ 也收敛。

定理 5.4.4 (*Abel*, *N. H* 判别法) 若正 *Fuzzy* 数序列 $\{\underset{\sim}{a}_n\}$ 单调有界,且正项 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{b}_n$ 收敛,则 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a}_n \underset{\sim}{b}_n$ 也收敛.

定理 5.4.5(*Dirichlet*, *P. G. L* **判别法**) 若正 *Fuzzy* 数序列 $\{\underset{\sim}{a}_n\}$ 单调递减,且 $\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{a}_n = 0$,正项 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{b}_n$ 的部分和

Fuzzy 序列 $\{\underset{\sim}{S_n}\}$ 有界，则 *Fuzzy* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{a_n}\underset{\sim}{b_n}$ 也收敛.

定理 5.4.6 若实 *Fuzzy* 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{\alpha_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{b_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{c_n}$ 对任意的 n，满足 $\underset{\sim}{\alpha_n} \leqslant \underset{\sim}{b_n} \leqslant \underset{\sim}{c_n}$, $n = 1, 2, \cdots$，且 *Fuzzy* 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{\alpha_n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{c_n}$ 都收敛于 $\underset{\sim}{S}$，则 *Fuzzy* 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{b_n}$ 也收敛于 $\underset{\sim}{S}$。

要证明此定理要用到下面的引理

引理 对任意的 $\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in F(R)$，如果 $\underset{\sim}{\alpha} \leqslant \underset{\sim}{b} \leqslant \underset{\sim}{c}$，则

$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{b}) \leqslant \tilde{\rho}(\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{c})$。

定理 5.4.6 的证明

设 $\underset{\sim}{u_n} = \underset{\sim}{\alpha_1} + \underset{\sim}{\alpha_2} + \cdots + \underset{\sim}{\alpha_n}$, $\underset{\sim}{v_n} = \underset{\sim}{b_1} + \underset{\sim}{b_2} + \cdots + \underset{\sim}{b_n}$, $\underset{\sim}{w_n} = \underset{\sim}{c_1} + \underset{\sim}{c_2} + \cdots + \underset{\sim}{c_n}$，因为对任意的 n，$\underset{\sim}{\alpha_n} \leqslant \underset{\sim}{b_n} \leqslant \underset{\sim}{c_n}$，所以对任意的 n 有

$$\underset{\sim}{u_n} \leqslant \underset{\sim}{v_n} \leqslant \underset{\sim}{w_n}$$

又因为 *Fuzzy* 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{\alpha_n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{c_n}$ 都收敛于 $\underset{\sim}{S}$，从而有

$(\tilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \underset{\sim}{u_n} = (\tilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \underset{\sim}{\omega_n} = \underset{\sim}{S}$，即对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 > 0$，$N_2 > 0$，使得当 $n \geqslant N_1$ 时

$$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{u_n}, \underset{\sim}{S}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

当 $n \geqslant N_2$ 时

$$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{\omega_n}, \underset{\sim}{S}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

注意到对任何 n，$\underset{\sim}{u_n} \leqslant \underset{\sim}{v_n} \leqslant \underset{\sim}{w_n}$，则当 $n \geqslant max\{N_1, N_2\}$ 时，由引理我们有

$$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{u_n}, \underset{\sim}{v_n}) \leqslant \tilde{\rho}(\underset{\sim}{u_n}, \underset{\sim}{w_n}) < \tilde{\rho}(\underset{\sim}{u_n}, \underset{\sim}{S}) + \tilde{\rho}(\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{w_n}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

从而有

$$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{v}_n,\underset{\sim}{S})\leqslant\tilde{\rho}(\underset{\sim}{v}_n,\underset{\sim}{u}_n)+\tilde{\rho}(\underset{\sim}{u}_n,\underset{\sim}{S})<\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

即

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{v}_n=\underset{\sim}{S}\text{，亦即}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{b}_n=\underset{\sim}{S}.\text{证毕.}$$

§ 5.5　区间值函数与模糊值函数项级数的收敛性

1　区间值函数项级数

定义 5.5.1　设 $\overline{f}:[\alpha,+\infty)\to I(R),x\to\overline{f}(x)=[f^-(x),f^+(x)]$，称 $\overline{f}$ 为 $[\alpha,+\infty]$ 上的区间值函数。($f^-(x)$ 与 $f^+(x)$ 为 $[\alpha,+\infty)$ 上的实值函数，且 $\forall x\in[\alpha,+\infty),f^-(x)\leqslant f^+(x)$).

定义 5.5.2　设 $\overline{f}_n$ 是定义在 $[\alpha,+\infty)$ 上的区间值函数($n=1,2,\cdots$)，$\overline{f}_n(x)=[f_n^-(x),f_n^+(x)]$，称

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n(x)&=\overline{f}_1(x)+\overline{f}_2(x)+\cdots+\overline{f}_n(x)+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}[f_n^-(x),f_n^+(x)]\end{aligned}$$

为区间值函数项级数。

定义 5.5.3　$\forall x_0\in[\alpha,+\infty)$，区间值函数项级数对应于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}[f_n^-(x_0),f_n^+(x_0)]$，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n^-(x_0)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n^+(x_0)$ 收敛，则称区间值函数项级数在 x_0 点收敛，x_0 为收敛点；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n^-(x_0)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n^+(x_0)$ 至少有一个发散，则称区间值函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n(x)$ 在 x_0 发散。

区间值函数项级数的前 n 项和

$$\overline{S}_n(x)=\overline{f}_1(x)+\overline{f}_2(x)+\cdots+\overline{f}_n(x)$$

就是区间值函数项级数项的 n 项部分和函数，简称部分和。记为 $\overline{S}_n(x)=[S_n^-(x),S_n^+(x)]$。

区间值函数项级数的和是定义在收敛域上的区间值函数，设此函数为 $\overline{S}(x)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n(x)=\overline{S}(x).$$

定义 5.5.4 设区间值函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n(x)$ 在区间 I 上收敛于和函数 $\overline{S}(x)$，$\overline{S}(x)=[S^-(x),S^+(x)]$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^-(x)$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^+(x)$ 在 I 上分别一致收敛于 $S^-(x)$ 与 $S^+(x)$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n(x)$ 在 I 上一致收敛，或一致收敛于 $\overline{S}(x)$。

区间值函数项级数有如下一致收敛判别法则。

定理 5.5.1 区间值函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N},\forall x\in I$ 有

$$\overline{f}_{n+1}(x)+\overline{f}_{n+2}(x)+\cdots+\overline{f}_{n+p}(x)\subset(-\varepsilon,\varepsilon)。$$

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n(x)$ 在区间 I 一致收敛 $\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^-(x)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^+(x)$ 在 I 上一致收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}$（共同的），$\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N},\forall x\in I$ 有

$$|f_{n+1}^-(x)+f_{n+2}^-(x)+\cdots+f_{n+p}^-(x)|<\varepsilon,$$

$$|f_{n+1}^+(x)+f_{n+2}^+(x)+\cdots+f_{n+p}^+(x)|<\varepsilon,$$

$$\Leftrightarrow\overline{f}_{n+1}(x)+\overline{f}_{n+2}(x)+\cdots+\overline{f}_{n+p}(x)\subset(-\varepsilon,\varepsilon).$$ 证毕.

定理 5.5.2 设有区间值函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n(x)$，$I$ 是区间，若 $\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall x\in I$ 有 $\overline{f}_n(x)\subseteq\overline{\alpha}_n$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\alpha}_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n(x)$ 在 I 一致收敛。其中 $\overline{\alpha}_n$ 为区间数，$\overline{\alpha}_n=[\alpha_n^-,\alpha_n^+]$，$n=1,2,\cdots$。

证明 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\alpha}_n$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^-$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^+$ 收敛，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}$(共同的)，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}$ 有

$$|\alpha_{n+1}^-+\alpha_{n+2}^-+\cdots+\alpha_{n+p}^-|<\varepsilon,$$

$$|\alpha_{n+1}^++\alpha_{n+2}^++\cdots+\alpha_{n+p}^+|<\varepsilon,$$

从而有 $\overline{\alpha}_{n+1}+\overline{\alpha}_{n+2}+\cdots+\overline{\alpha}_{n+p}\subset(-\varepsilon,\varepsilon)$。

又已知，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall x\in I$ 有 $\overline{f}_n(x)\subseteq\overline{\alpha}_n$，取 $N_2=max\{N_1,N\}$，$\forall n>N_2$，$\forall x\in I$ 有

$$\overline{f}_{n+1}(x)+\overline{f}_{n+2}(x)+\cdots+\overline{f}_{n+p}(x)\subseteq\overline{\alpha}_{n+1}+\overline{\alpha}_{n+2}+\cdots+\overline{\alpha}_{n+p}\subset(-\varepsilon,\varepsilon)。$$

根据定理 5.5.1，区间值函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n(x)$ 在 I 一致收敛. 证毕.

定理 5.5.3 若区间值函数列 $\{\overline{f}_n(x)\}$ 在区间 I 上单调一致趋近于 0，区间值函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{g}_n(x)$ 的部分和函数列 $\{\overline{G}_n(x)\}$ 在 I 一致有界，则区间值函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n(x)\overline{g}_n(x)$ 在 I 一致收敛。

证明 已知区间值函数列 $\{\overline{f}_n(x)\}$ 在区间 I 单调一致趋近于 0，$\overline{f}_n(x)=[f_n^-(x),f_n^+(x)]$，于是函数列 $\{f_n^-(x)\}$ 与 $\{f_n^+(x)\}$ 在

I 上单调一致趋近于 0，又已知部分和函数列 $\{\overline{G}_n(x)\}$ 在 I 一致有界，即 $\exists\, \overline{M}=[M^-,M^+]$，$\forall\, n\in \boldsymbol{N}$，$\forall\, x\in I$ 有

$$[G_n^-(x), G_n^+(x)] = \overline{G}_n(x) \subseteq \overline{M} = [M^-, M^+]$$

于是函数列 $\{G_n^-(x)\}$ 与 $\{G_n^+(x)\}$ 在 I 一致有界，由分明集狄利克莱判别法可知函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^-(x) g_n^-(x)$ 与函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^+(x) g_n^+(x)$ 在 I 一致收敛，根据定义 5.5.4，区间值函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{f}_n(x)\overline{g}_n(x)$ 在 I 一致收敛. 证毕.

定理 5.5.4 若区间值函数列 $\{\overline{f}_n(x)\}$ 在区间 I 单调一致有界，且区间值函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{g}_n(x)$ 在 I 一致收敛，则区间值函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{f}_n(x)\overline{g}_n(x)$ 在 I 一致收敛。

证明 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{g}_n(x)$ 在 I 一致收敛，即函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n^-(x)$ 与函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n^+(x)$ 在 I 一致收敛，又已知区间值函数列 $\{\overline{f}_n(x)\}$ 在区间 I 单调一致有界，即 $\exists\, \overline{M}\in \overline{R}$，$\forall\, n\in \boldsymbol{N}$，$\forall\, x\in I$ 有

$$\overline{f}_n(x) \subseteq \overline{M} = [M^-, M^+],$$

即 $[f_n^-(x), f_n^+(x)] \subseteq [M^-, M^+]$，

有 $M^- \leqslant f_n^-(x) \leqslant f_n^+(x) \leqslant M^+$，

故函数列 $\{f_n^-(x)\}$ 与 $\{f_n^+(x)\}$ 在 I 上一致有界，并由 $\{\overline{f}_n(x)\}$ 的单调性可知 $\{f_n^-(x)\}$ 与 $\{f_n^+(x)\}$ 在 I 单调，根据分明集阿贝尔判别法可知函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^-(x) g_n^-(x)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^+(x) g_n^+(x)$ 在 I 一致收敛，根据定义 5.5.4 区间值函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{f}_n(x)\overline{g}_n(x)$

在 I 一致收敛. 证毕.

2　模糊值函数级数

定义 5.5.5　设 $\underset{\sim}{f}:[\alpha,+\infty]\to F^*(R), x\to\underset{\sim}{f}(x)=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\ \bar{f}_\lambda(x)$, 称 $\underset{\sim}{f}$ 为$[\alpha,+\infty)$上的模糊值函数。

定义 5.5.6　设 $\underset{\sim}{f}_n(x)$是定义在$[\alpha,+\infty)$上的模糊值函数($n=1,2,\cdots$), $\underset{\sim}{f}_n(x)=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\ \bar{f}_{n_\lambda}(x)$, 称 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\ \bar{f}_{n_\lambda}(x)=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\left[\sum_{n=1}^{\infty}f_{n_\lambda}^-(x),\sum_{n=1}^{\infty}f_{n_\lambda}^+(x)\right]$为模糊值函数级数。

定义 5.5.7　$\forall x_0\in[\alpha,+\infty]$, 模糊值函数级数对应于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\ \bar{f}_{n_\lambda}(x_0)$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}_{n_\lambda}(x_0)$收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(x_0)$收敛, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}_{n_\lambda}(x_0)$发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(x_0)$发散。

定义 5.5.8　设模糊值函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\ \bar{f}_{n_\lambda}(x)$, 若区间值函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}_{n_\lambda}(x)$在 I 一致收敛, 则称模糊值函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(x)$在 I 一致收敛。

定理 5.5.5　模糊值函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(x)$在区间 I 一致收敛$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N},\forall x\in I,\lambda\in(0,1]$, 有

$$\bar{f}_{(n+1)\lambda}(x)+\bar{f}_{(n+2)\lambda}(x)+\cdots+\bar{f}_{(n+p)\lambda}(x)\subset(-\varepsilon,\varepsilon)。$$

根据定理 5.5.1 易证。

定理 5.5.6　有模糊值函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(x)$, I 是区间, 若 $\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall x\in I$ 有 $\underset{\sim}{f}_n(x)\subseteq\underset{\sim}{\alpha}_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{\alpha}_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(x)$在 I 一致收敛。

定理 5.5.7 若模糊值函数列$\{\underset{\sim}{f}_n(x)\}$在区间 I 单调一致趋近于 0,模糊值函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{g}_n(x)$部分和函数列$\{\underset{\sim}{G}_n(x)\}$在 I 一致有界,则模糊值函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(x)\underset{\sim}{g}_n(x)$在 I 一致收敛。

根据定理 5.5.3 可证得此结论.

定理 5.5.8 若模糊值函数列$\{\underset{\sim}{f}_n(x)\}$在区间 I 单调一致有界,且模糊值函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{g}_n(x)$在 I 上一致收敛,则模糊值函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(x)\underset{\sim}{g}_n(x)$在 I 一致收敛。

根据定理 5.5.4 可证得此结论。

§5.6 复 *Fuzzy* 数项级数及其收敛性

定义 5.6.1 设 $\underset{\sim}{Z}_1,\underset{\sim}{Z}_2\in C_0{}^F(C)$为两有界闭复 *Fuzzy* 数,映射:$\tilde{\rho}:C_0^F(C)\times C_0^F(C)\rightarrow F(R)$

若满足:

(1)$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{Z}_1,\underset{\sim}{Z}_2)\geqslant 0,\underset{\sim}{Z}_1=\underset{\sim}{Z}_2\Leftrightarrow\tilde{\rho}(\underset{\sim}{Z}_1,\underset{\sim}{Z}_2)=0$

(2)$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{Z}_1,\underset{\sim}{Z}_2)=\tilde{\rho}(\underset{\sim}{Z}_2,\underset{\sim}{Z}_1)$

(3)$\forall\,\underset{\sim}{Z}_3\in C_0^F(C)$有

$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{Z}_1,\underset{\sim}{Z}_2)\leqslant\tilde{\rho}(\underset{\sim}{Z}_1,\underset{\sim}{Z}_3)+\tilde{\rho}(\underset{\sim}{Z}_3,\underset{\sim}{Z}_2)$

则称 $\tilde{\rho}$ 为复 *Fuzzy* 数的模糊距离,称$(C,C_0^F(C),\tilde{\rho})$为一复 *Fuzzy* 数度量空间。

定义 5.6.2 设$\{\underset{\sim}{Z}_n\}\subset C_0{}^F(C)$，$\underset{\sim}{Z}\in C_0^F(C)$.

若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n\geqslant N$时，$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{Z}_n,\underset{\sim}{Z})<\varepsilon$.

则称$\{\underset{\sim}{Z}_n\}$收敛于$\underset{\sim}{Z}$，记作：$\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{Z}_n=\underset{\sim}{Z}$.

定义 5.6.3 设$\{\underset{\sim}{Z}_n=\underset{\sim}{X}_n+i\underset{\sim}{Y}_n\}\subset C_0^F(C)$为一有界闭复 *Fuzzy* 数序列，令$\underset{\sim}{S}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\underset{\sim}{Z}_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\underset{\sim}{X}_k+i\sum\limits_{k=1}^{n}\underset{\sim}{Y}_k$

若存在$\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\underset{\sim}{Y}\in C_0^F(C)$，使得

$\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{S}_n=\underset{\sim}{Z}$. 则称复 *Fuzzy* 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{Z}_n$收敛于$\underset{\sim}{Z}$. 记作：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{Z}_n=\underset{\sim}{Z}$. 其中，$\underset{\sim}{S}_n$称为复 *Fuzzy* 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{Z}_n$的部分和，$\underset{\sim}{\gamma}_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\underset{\sim}{Z}_k=\underset{\sim}{Z}-\underset{\sim}{S}_n$称为复 *Fuzzy* 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{Z}_n$的余和。

定理 5.6.1 设$\{\underset{\sim}{Z}_n\}\subset C_0^F(C)$，$\underset{\sim}{Z}\in C_0^F(C)$，则复 *Fuzzy* 数序列$\{\underset{\sim}{Z}_n\}$收敛于$\underset{\sim}{Z}$的充分必要条件是：对$\forall\lambda\in(0,1]$，$\{X_{n,\lambda}^-\}$，$\{X_{n,\lambda}^+\}$，$\{Y_{n,\lambda}^-\}$，$\{Y_{n,\lambda}^+\}$均一致收敛.

其中 $\underset{\sim}{Z}_n=\underset{\sim}{X}_n+i\,\underset{\sim}{Y}_n$，$\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+i\,\underset{\sim}{Y}$。

此定理的证明直接根据定义 5.6.2 参考文[48]中 *Fuzzy* 实数序列的相关定理立即可证，这里从略。

定理 5.6.2 复 *Fuzzy* 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{Z}_n$收敛于$\underset{\sim}{Z}$的充分必要条件是：对$\forall\lambda\in(0,1]$，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_{n,\lambda}^-$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_{n,\lambda}^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}Y_{n,\lambda}^-$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}Y_{n,\lambda}^+$均一致收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{Z}_n=\bigcup\limits_{\lambda\in(0,1]}\lambda\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_{n,\lambda}^-,\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_{n,\lambda}^+\right]+i\bigcup\limits_{\lambda\in(0,1]}\lambda\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}Y_{n,\lambda}^-,\sum\limits_{n=1}^{\infty}Y_{n,\lambda}^+\right]=\underset{\sim}{Z}=\bigcup\limits_{\lambda\in(0,1]}\lambda[X_\lambda^-,X_\lambda^+]+i\bigcup\limits_{\lambda\in(0,1]}\lambda[Y_\lambda^-,Y_\lambda^+]$

其中：$\underset{\sim}{Z}_n = \underset{\sim}{X}_n + i\,\underset{\sim}{Y}_n$.　　　　$\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{X} + i\,\underset{\sim}{Y}$.

证明：令 $\underset{\sim}{S}_n = \underset{\sim}{Z}_1 + \underset{\sim}{Z}_2 + \cdots + \underset{\sim}{Z}_n = \sum_{k=1}^{n} \underset{\sim}{X}_k + i \sum_{k=1}^{n} \underset{\sim}{Y}_k$　　$(n = 1, 2, \cdots)$

由定理 5.6.1 知，$\{\underset{\sim}{S}_n\}$ 收敛于 $\underset{\sim}{Z} = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda[X_\lambda^-, X_\lambda^+] + i \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda[Y_\lambda^-, Y_\lambda^+]$ 的充分必要条件是：$\forall \lambda \in (0,1]$，$\{X_{n,\lambda}^-\}$，$\{X_{n,\lambda}^+\}$，$\{Y_{n,\lambda}^-\}$，$\{Y_{n,\lambda}^+\}$ 分别均一致收敛于 $X_\lambda^-, X_\lambda^+, Y_\lambda^-, Y_\lambda^+$，

于是，$\lim_{n \to \infty} \underset{\sim}{S}_n = \underset{\sim}{Z} = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda[X_\lambda^-, X_\lambda^+] + i \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda[Y_\lambda^-, Y_\lambda^+]$

即：$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{Z}_n = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda[\sum_{n=1}^{\infty} X_{n,\lambda}^-, \sum_{n=1}^{\infty} X_{n,\lambda}^+] + i \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda[\sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,\lambda}^-, \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,\lambda}^+]$. 证毕.

定理 5.6.3　（*Cauchy* 收敛准则）

复 *Fuzzy* 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{Z}_n$ 收敛的充分必要条件是：对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n \geqslant N$ 时，对任意自然数 p，有 $\tilde{\rho}(\sum_{k=1}^{n+p} \underset{\sim}{Z}_k, \sum_{k=1}^{n} \underset{\sim}{Z}_k) < \varepsilon$，其中 $\tilde{\rho}$ 为复 *Fuzzy* 数的 *Fuzzy* 距离。

证明：令 $\underset{\sim}{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \underset{\sim}{Z}_k$。　　　$n = 1, 2, \cdots$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{Z}_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{\underset{\sim}{S}_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n \geqslant N$ 时，对任意自然数 p，由距离的性质有：$\tilde{\rho}(\underset{\sim}{S}_{n+p}, \underset{\sim}{S}_n) < \varepsilon$。

即：$\tilde{\rho}(\sum_{k=1}^{n+p} \underset{\sim}{Z}_k, \sum_{k=1}^{n} \underset{\sim}{Z}_k) < \varepsilon$. 证毕.

§ 5.7　复模糊值函数级数及其收敛性

定义 5.7.1　设 $\underset{\sim}{f}_n(t)=\underset{\sim}{h}_n(t)+i\underset{\sim}{g}_n(t)$ 为 T 上的复模糊集值函数($n=1,2\cdots$),

$\underset{\sim}{f}_n(t)=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[h_{n,\alpha}(t),h^{+}_{n,\alpha}(t)]+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[g^{-}_{n,\alpha}(t),g^{+}_{n,\alpha}(t)]$,称

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(t)=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\sum_{n=1}^{\infty}h^{-}_{n,\alpha}(t),\sum_{n=1}^{\infty}h^{+}_{n,\alpha}(t)\right]+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\sum_{n=1}^{\infty}g_{n,\alpha}(t),\sum_{n=1}^{\infty}g^{+}_{n,\alpha}(t)\right]$$

为复模糊值函数级数。

对于 $t_0\in T$,若 $\sum_{n=1}^{\infty}h^{-}_{n,\alpha}(t_0)$, $\sum_{n=1}^{\infty}h^{+}_{n,\alpha}(t_0)$, $\sum_{n=1}^{\infty}g^{-}_{n,\alpha}(t_0)$, $\sum_{n=1}^{\infty}g^{+}_{n,\alpha}(t_0)$均收敛,且分别收敛于 $h^{-}_{\alpha}(t_0),h^{+}_{\alpha}(t_0),g^{-}_{\alpha}(t_0),g^{+}_{\alpha}(t_0)$,则称复模糊值函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(t)$收敛于 $\underset{\sim}{f}(t_0)=\underset{\sim}{h}(t_0)+i\underset{\sim}{g}(t_0)=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[h_{\alpha}(t_0),h^{+}_{\alpha}(t_0)]+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[g_{\alpha}(t_0),g^{+}_{\alpha}(t_0)]$, t_0 称为其收敛点。

若 $\sum_{n=1}^{\infty}h^{-}_{n,\alpha}(t)$, $\sum_{n=1}^{\infty}h^{+}_{n,\alpha}(t)$, $\sum_{n=1}^{\infty}g_{n,\alpha}(t)$, $\sum_{n=1}^{\infty}g^{+}_{n,\alpha}(t)$在区间 I 上均一致收敛,且分别收敛于 $h_{\alpha}(t),h^{+}_{\alpha}(t),g^{-}_{\alpha}(t),g^{+}_{\alpha}(t)$,则称复模糊值函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(t)$在 I 上一致收敛于和函数 $\underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{h}(t)+i\underset{\sim}{g}(t)=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[h^{-}_{\alpha}(t),h^{+}_{\alpha}(t)]+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[g^{-}_{\alpha}(t),g^{+}_{\alpha}(t)]$

记作:$\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{f}_n(t)=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha\left[\sum_{n=1}^{\infty}h^{-}_{n,\alpha}(t),\sum_{n=1}^{\infty}h^{+}_{n,\alpha}(t)\right]+i\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha$

$$[\sum_{n=1}^{\infty} g_{n,\alpha}(t), \sum_{n=1}^{\infty} g_{n,\alpha}^{+}(t)] = \underset{\sim}{f}(t)$$

$$= \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha[h_{\alpha}^{-}(t), h_{\alpha}^{+}(t)] + i \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha[g_{\alpha}(t), g_{\alpha}^{+}(t)]$$

定理 5.7.1 T 上复模糊值函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{f_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{h_n}(t) + i \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{g_n}(t)$ 一致收敛的充分必要条件为 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{h_n}(t)$，$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{g_n}(t)$ 在 T 上一致收敛。

此定理的证明可直接由定义 5.7.1 得到，证略。

定理 5.7.2 *Cauchy* 收敛原理。

$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{f_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{h_n}(t) + i \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{g_n}(t)$ 在区间 I 上一致收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}$，当 $n > \mathbf{N}$ 时，对 $\forall p \in \mathbf{N}$，$\forall t \in T$，$\forall \lambda \in (0,1]$ 有

$$h_{n+1,\lambda}(t) + h_{n+2,\lambda}(t) + \cdots + h_{n+p,\lambda}(t) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$g_{n+1,\lambda}(t) + g_{n+2,\lambda}(t) + \cdots + g_{n+p,\lambda}(t) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$$

其中：$\begin{matrix} h_{k,\lambda}(t) = [h_{k,\lambda}^{-}(t), h_{k,\lambda}^{+}(t)] \\ g_{k,\lambda}(t) = [g_{k,\lambda}(t), g_{k,\lambda}^{+}(t)] \end{matrix}$ 为 I 上区间值函数。

证明：由定理 5.7.1 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{f_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{h_n}(t) + i \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{g_n}(t)$ 在 I 上一致收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)$，$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{g_n}(t)$ 在 I 上均一致收敛。

由定义 5.7.1 知，$\forall \lambda \in (0,1]$，$\sum_{n=1}^{\infty} h_{n,\lambda}^{-}(t)$，$\sum_{n=1}^{\infty} h_{n,\lambda}^{+}(t)$，$\sum_{n=1}^{\infty} g_{n,\lambda}^{-}(t)$，$\sum_{n=1}^{\infty} g_{n,\lambda}^{+}(t)$ 在 I 上均一致收敛，$\overline{h}_{k,\lambda}(t) = [h_{k,\lambda}^{-}(t), h_{k,\lambda}^{+}(t)]$，$\overline{g}_{k,\lambda}(t) = [g_{k,\lambda}^{-}(t), g_{k,\lambda}^{+}(t)]$

由定理 5.5.1 可知 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 公共 $N \in \mathbf{N}$，$\forall n > N$，$\forall p \in$

$\mathbf{N}, \forall t \in T$ 有

$$\overline{h}_{n+1,\lambda}(t)+\overline{h}_{n+2,\lambda}(t)+\cdots+\overline{h}_{n+p,\lambda}(t)\subset(-\varepsilon,\varepsilon)$$

$$\overline{g}_{n+1,\lambda}(t)+\overline{g}_{n+2,\lambda}(t)+\cdots+\overline{g}_{n+p,\lambda}(t)\subset(-\varepsilon,\varepsilon).$$ 证毕.

定理 5.7.3 $\sum\limits_{n-1\sim}^{\infty} f_n(t)=\sum\limits_{n-1\sim}^{\infty} h_n(t)+i\sum\limits_{n-1\sim}^{\infty} g_n(t)$是区间 I 上的复模糊值函数，$\forall \lambda \in(0,1]$，若 $\exists N\in \mathbf{N}$，$\forall n\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，$\forall t\in I$ 有 $\overline{f}_{n,\lambda}(t)=\overline{h}_{n,\lambda}(t)+i\,\overline{g}_{n,\lambda}(t)\subseteq\overline{M}_n=\overline{a}_n+i\,\overline{b}_n$，即 $\overline{h}_{n,\lambda}(t)\subseteq\overline{a}_n$，$\overline{g}_{n,\lambda}(t)\subseteq\overline{b}_n$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{M}_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n-1\sim}^{\infty} f_n(t)$在 I 上一致收敛。

证明:因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{M}_n$ 收敛，即 $\sum\limits_{n-1}^{\infty}\overline{a}_n$，$\sum\limits_{n-1}^{\infty}\overline{b}_n$ 均收敛，

而 $\forall t\in I$，$\overline{h}_{n,\lambda}(t)\subseteq\overline{a}_n$，$\overline{g}_{n,\lambda}(t)\subseteq\overline{b}_n$，

由定理 5.5.2 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{h}_{n,\lambda}(t)$，$\sum\limits_{n-1}^{\infty}\overline{g}_{n,\lambda}(t)$在 I 上均一致收敛，

即 $\sum\limits_{n-1}^{\infty}h^-_{n,\lambda}(t)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}h^+_{n,\lambda}(t)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_{n,\lambda}(t)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}g^+_{n,\lambda}(t)$在 I 上均一致收敛，由定义 5.7.1 知 $\sum\limits_{n-1\sim}^{\infty} f_n(t)$在 I 上一致收敛。

第六章　研究进展与注

§6.1　模糊数系的发展

模糊数是模糊分析学中最基本最重要的概念之一。关于模糊数的概念,最早可追溯到1972年模糊学的创始人 *Zadeh* 和 *Chang S. S. L.* 的文章"*On fuzzy mapping and control*"(*IEEE Trans. Systems Man Cybernet*,(1972)2(1);30－34)中,文中结合概率分布函数的性质,把实数域 R 上的一族具有特殊性质的模糊集称为模糊数。之后,日本水本雅晴和田中英夫(*Mizumoto M. Tanaka K.* 1976 年)、纳米亚斯(*Nahmias*,1978 年)、D. 杜布瓦(*D. Dubois*)和普哈德(*H. Prade*)(1978 年、1982 年、1987 年)先后对模糊数系的各种性质深入分析,特别是考虑到建立模糊数系的微积分等,人们已越来越多地注意到将模糊数系与区间分析、集值映射理论联系起来,于是形成了模糊实数系的较系统理论。下面仅介绍一下主要代表性思路。

(一)首先是 C. V. 尼格依塔(*C. V. Negoita*)、D. A 拉列斯库(*D. A. Ralescu*)1975 年在他们的著作《*Application of Fuzzy Sets to System analysis*》中,将模糊数看成是一个区间数族 $\{[u]^r : r\in[0,1]\}$(含参数的区间数),这样就有了下列模糊数的表示定理:

若 $u\in E^1$,则

(1)对 $r\in[0,1]$,$[u]^r$ 均为非空有界闭区间;

(2)若 $0\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant 1$,则$[u]^{r_2}\subset[u]^{r_1}$;

(3)若正数 r_n 非降收敛于$r\in(0,1]$,则$\bigcap_{n=1}^{\infty}[u]^{r_n}=[u]^r$.

反之,若对任何 $r\in[0,1]$,均存在 $A^r\subset R$,并满足相应的(1)-(3),则有惟一的模糊数 $u\in E^1$,使$[u]^r=A^r$,$r\in(0,1]$,且

$$[u]^0=\overline{\bigcup_{r\in(0,1]}[u]^r}\subset A^0$$

(二)接着,1986年,R.戈茨切尔(*R. Goetschel*),W.沃克斯曼(*W. Voxman*)在*FSS*上发表了题为"*Elementary Calculus*"的文章,文中用两参考函数$\{(a(r),b(r),r):r\in[0,1]\}$来刻划模糊数,形成了下列模糊数的表示定理:

对 $u\in E^1$,以 $\underline{u}(r)$,$\overline{u}(r)$记$[u]^r$ 的下、上端点,则 $\underline{u}(r)$,$\overline{u}(r)$均为$[0,1]$上的函数,且满足:

(1)$\underline{u}(r)$单调非降左连续;

(2)$\overline{u}(r)$单调非增左连续;

(3)$\overline{u}(1)\geqslant\underline{u}(1)$;

(4)$\underline{u}(r)$,$\overline{u}(r)$在 $r=0$ 处右连续。

反过来,对任何满足上述条件(1)-(4)的$[0,1]$上的函数 $a(r)$,$b(r)$,存在惟一的 $u\in E^1$,使$[u]^r=[a(r),b(r)]$,$r\in[0,1]$.

(一)、(二)模糊数的表示定理在研究与模糊数有关的各类问题中有着广泛地应用.

（二）、基于区间分析的方法和集值映射理论，1981 年，*R. Goetschel* 和 *W. Voxman* 在 *JMAA* 上的文章"*A Pseudometric for fuzzy sets and Certain related result*"，83 年在 *FSS* 上的文章"*Topological properties of fuzzy numbers*"；1984 年、1985 年，*J.* 埃伯希特（*J. Albrycht*）和马特沃卡（*Mat loka*）在 *FSS* 的文章"*On fuzzy multi - valued function*"；1984 年，*R.* 巴达德（*R. Badard*）在 *JMAA* 上的文章"*Fuzzy preuniform structures and the structures they induce*"，在 *FSS* 上的文章"*Fixed point theorems for fuzzy numbers*"、1987 年在 *FSS* 上的文章"*Comparison of topological and uniform structures for fuzzy numbers and the fixed point problem*"；1985 年，*O.* 卡列瓦（*O. Kaleva*）在 *FSS* 上的文章"*On convergence of fuzzy sets*"；1988 年，欧阳合（*Ouyang He*）在 *JMAA* 上的文章"*Topological properties of the space of regular fuzzy sets*"等.

上述这些研究者，对模糊数空间 E^1 的拓扑性质进行了广泛地研究，由一致 *Hausdorff* 度量引出了如下拓扑结构：

若在 E^1 中，定义 $D: E^1 \times E^1 \to [0, +\infty)$

$$D(u,v) = \sup_{r \in [0,1]} d([u]^r, [v]^r)$$

$$= \sup_{r \in [0,1]} max(|\underline{u}(r) - \underline{v}(r)|, |\overline{u}(r) - \overline{v}(r)|)$$

其中 $d([u]^r, [v]^r)$ 是 *Hausdorff* 度量

则

(1)(E^1, D)是完备度量空间；

(2)$D(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| D(u,v), \lambda \in R$

(3)$D(u+w, v+w) = D(u,v)$

除此之外，还引出了如下拓扑结构：

δS 结构：对 $u,v\in E^1$，记

$G_u=\{(x,t)\in R\times[0,1]:\ t\leqslant u(x)\}$，

$G_v=\{(x,t)\in R\times[0,1]:\ t\leqslant v(x)\}$

则 E^1 上的 δS 拓扑结构由度量

$\delta(u,v)=d(G_u,G_v)$

所确定，此处 d 为 $R\times[0,1]$上的 *Hausdorff* 度量.

MS 结构： 记

$\varphi(E^1)=\{([u]^r)_{r\in[0,1]}:u\in E^1\}$，

则 E^1 上的 *MS* 拓扑结构定义为 $\varphi(E^1)$中关于 *Hausdorff* 收敛的商结构。

事实上，$(E^1,\delta S)$与(E^1,MS)均是完备可分、可度量化的拓扑空间。

（四）为了运用泛函分析的工具来研究取值于模糊数的函数，1983 年，*M. L* 普瑞（*M. L. Puri*）和 *D. A.* 拉列斯库（*D. A. Ralescu*）在 *JMAA* 上的文章“*Differential for fuzzy function*”中，借助于紧凸集的拉斯特姆（*Radstrom*）嵌入定理，将模糊数空间 E^1 等距同构地嵌入到某 *Banach* 空间 X，并且作为其内的顶点为 θ 的闭凸锥。虽然利用该嵌入算子及抽象函数理论可以定义模糊函数的微分等，并且也能将模糊数空间的性质研究与 *Banach* 空间理论联系起来，但由于并未明确地给出 *Banach* 空间的具体结构，这就影响了普瑞——拉列斯库嵌入定理的更深入的应用。吴从炘和马明在其 1991 年的著作《模糊分析学基础》中，引入 *Banach* 空间 $\overline{C}[0,1]$：

$\overline{C}[0,1]$为$[0,1]$上有界左连续、对 $t\in[0,1]$有右极限，且在 $t=0$ 处右连续的全体函数。$\overline{C}[0,1]$在范数 $\|f\| = \sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$下构成 *Banach* 空间。在 E^1 情形下，给出下列嵌入定理：

(Ⅰ)对任何 $u\in E^1$，记 $j(u)=(\underline{u},\overline{u})$，则 $j(E^1)$是 $\overline{C}[0,1]\times\overline{C}[0,1]$中以 θ 为顶点的闭凸锥，且

$j:E^1\to\overline{C}[0,1]\times\overline{C}[0,1]$ （其范数为 $\|(\cdot,\cdot)\| = max\{\|\cdot\|,\|\cdot\|\}$）.

满足：

(1)对任何 $u,v\in E^1, s\geqslant 0, t\geqslant 0$ 有 $j(su+tv)=sj(u)+tj(v)$；

(2)$D(u,v)=\|j(u)-j(v)\|$ 对任何 $u,v\in E^1$ 成立，即 j 等距同构地将E^1 嵌入到 $\overline{C}[0,1]\times\overline{C}[0,1]$内.

(Ⅱ) (1) $j(E^1)-j(E^1)=(\overline{C}[0,1]\cap V[0,1])\times(\overline{C}[0,1]\cap V[0,1])$

式中 $V[0,1]$为$[0,1]$上有界变差函数全体。

(2) $\overline{j(E^1)-j(E^1)}=\overline{C}[0,1]\times\overline{C}[0,1]$

根据(二)中给出的模糊数的表现定理，通过引入的 *Banach* 空间$\overline{C}[0,1]\times\overline{C}[0,1]$来给出具体的等距同构嵌入算了 j。尽管在此等距意义下，该嵌入算子与普瑞——拉列斯库嵌入算子是等价的，但其形式具体，因而在对 *Banach* 空间$\overline{C}[0,1]$加以充分研究的前提下，可使其得到更有效的应用。

由于模糊数空间已成为一个较为完善的结构，人们已逐步开始了取值于模糊数的关系方程，取值于模糊数的度量，取值于模糊数的测度等方面的研究。除了模糊数的理论应用外，模糊数概念

本身就是从语言变量、近似推理等应用领域的需要提出来的，因此，模糊数理论已自然地应用在控制论、模糊数据分析等众多领域中。

（五）就模糊数系的范围而论，1989 年美国伯明翰 *Alabama* 大学 *J. J. Buckley* 教授，在 *FSS* 发表的论文“*Fuzzy complex numbers*”中，首先提出了模糊复数的概念，从而使模糊数系的范围大大地进行了拓广。*J. J. Buckley* 是用普通复数域 C 到区间[0, 1]上的映射来给出了模糊复数的分析定义，其定义较为抽象。之后，国内外一些学者，根据普通复数的构成形式，结合区间数、实模糊数概念以另一种方式给出了模糊复数与复模糊数的概念，进而对模糊复数域进行了较系统的研究。

注：本节参考文献见[60]－[77]、[37]、[14]、[18]、[22].

§6.2 模糊复分析进一步研究课题

模糊复分析作为模糊分析学的另一新分支，目前尚不完善，许多问题只是浅显的初步工作，需要更深入地进行研究。下面列出一些问题仅供参考。

（一）复模糊数与模糊复数及其运算的性质

复模糊数与模糊复数的表现形式，基本运算及其性质，复模糊数集、模糊复数集的结构、分析性质、度量等均需要更深入的研究。

（二）复模糊集值映射、复模糊集值函数的性质及其极限与连续性的深入研究。

（三）复模糊集值函数的微分与积分。

复模糊集值函数的可微性(解析性),可积性及其计算问题研究。

(四)复模糊级数及其性质

复模糊数项级数,复模糊函数项级数的收敛性及一致收敛性,复模糊集值函数的级数展开等问题研究。

(五)模糊复分析的应用研究。

参考文献

[1]张广全:《模糊值测度论》清华大学出版社,1998.

[2]刘旺金、何家儒:《模糊数学导论》,四川教育出版社,1992.

[3]何新贵:《模糊知识处理的理论与技术》,国防工业出版社,1994.

[4]邹开其、徐杨:《模糊系统与专家系统》,西南交大出版社,1989.

[5]贺仲雄:《模糊数学及其应用》,天津科技出版社,1983.

[6]*Siler, W and Buckley ,J. J. Fuzzy Numbers for Expert Systems, Proc. of international Symposium on Fuzzy Systems and Knowledge Engineering*,1987.103~109.

[7]何家儒:《等水平模糊数与等核模糊数》,《数学的实践与认识》,1988.1.14-17.

[8]田德良、常大勇:《模糊层次分析法及其在优化建材连锁配送方案中的应用》,《运筹与管理》,1998.(7);3,43~50.

[9]马生全,纪金水:《模糊环境下带有平衡条件的投资项目评估与选择数学模型》,《西北民族学院学报》(自然科学版)2001.7.

[10]张跃、王光远:《模糊随机动力系统理论》,科学出版社,1993

[11]*Kaufmann A. Introduction to the theory of Fuzzy subsets Vol. New York:Academic press*.1978.

[12]*Mizumoto M, Tauaka K. Algebraic properties of Fuzzy numbers Jnt Conf. Cybtorn Soc. Washington d c*,1976.

[13]张文修等:《模糊数学引论》,西安交通大学出版社,1991.

[14]*Goetschel R, Voxman W. Topological properties of fuzzy nembers. Fuzzy Sets and Syetems*. 1983.(10).

[15]马生全:《模糊复数及其几个运算性质》,《兰州大学学报》(自然科学版),第32卷,1996.643－645.

[16]马生全:《极模型模糊复数概念及简性》,《西北民族学院学报》(自然科学版) *Vol*.18,1.1997,8－9.

[17]孔繁森,于骏一:《闭复模糊数的定向模糊性问题探讨》,《兰州大学学报》(自然科学版),第32卷,1996.433－435.

[18] *Dubois D, Prade H. Addiflons of interactive fuzzy numbers. IEEF Trans Autom Control*, 1981, 26:926－936.

[19] *Fuller R. On Hamacher sum of trianguler fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 25:205－212.

[20]曹纯:《矩形 *Fuzzy* 复数的 *Hamacher* 和》,《西北师范大学学报》(自然科学版) *Vol*.35,1999.

[21]夏道行、吴卓人、严绍宗:《实变函数与泛函分析(上)》,北京,人民教育出版社,1982.

[22] *Goetschel R, Voxman W. Elementary fuzzy calculus. Fuzzy Sets and Syetems*, 1986, 18:31－42.

[23]罗承忠:《模糊集引论》,北京,北京师范大学出版社,1989.

[24]刘宁:《区间值函数与模糊值函数的极限》,《东北师范大学学报》,1994年(3)21.

[25]李法朝:《模糊性度量法》(1),《河北轻化工学院学报》,

1992,(3):22－26.

[26]汪培庄:《应用模糊数学》,北京经济学院出版社,1989.

[27]吴丛炘:《区间值函数与 *Fuzzy* 值函数的 *RS* 积分》,《吉林师院学报》(自然版),1991,1:1－8.

[28]罗承忠:《区间值函数积分的推广与 *Fuzzy* 值函数的积分》,《模糊数学》,1983,3:45－52.

[29] *Wang Zhenyan. The autocontinuity of set function and fuzzy integral. J. Math. Anal. Appl*. 1984,99:195－218.

[30]华东师范大学数学系:《数学分析》,高等教育出版社,1996.

[31] *Kruse R. note on λ － additive fuzzy measures. FSS*, 1982:219－222.

[32] *Wang Zhenyuan . Une classe de measures flous － les quasl － measures*, *BUSEFAL*, 1981,(6):28－37.

[33]吴从炘:《模糊分析学基础》,北京,国防工业出版社,1991.24－28.

[34]夏道行:《实变函数论与泛函分析》,北京,人民教育出版社,1978.130－144.

[35] *J. J. Buckley. Fuzzy complex numbers. FSS*, 1989,33:333－345.

[36] *O. Kaleva. Fuzzy differential equations. FSS*, 1987,24:301－317.

[37]吴从炘等:《模糊分析学的结构理论》,贵州科技出版社,1994.

[38]仇计清等:《复 *Fuzzy* 测度与复 *Fuzzy* 积分》,《兰州大学学报》,1996 第 32 卷 246－250.

[39] *Tian－Shy Liou, Mao－Jiun. Wang. Ranking fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Sytems*, 1992, 50:247－255.

[40] *J. J. Buckley. Fuzzy complex analysis I: Differentiation. Fuzzy Sets and Syetms*, 1991, 41:269－284.

[41]马生全等:《矩形模糊复数及其几个性质》,《西北民族学院学报》(自然科学版),1998.

[42]*D*.杜布瓦,*H*.普哈德:《模糊集与模糊系统》,江苏省模糊数学专业委员会译,江苏科学出版社,1987.

[43]张俊福等:《应用模糊数学》,地质出版社,1988.

[44]马生全、曹纯:《复模糊函数的微分法》,《模糊集理论与应用》,河北大学出版社,1998.8.

[45]于兴江,孟晗:《区间值函数与 *Fuzzy* 值函数的曲线积分和曲面积分》,《模糊集理论与应用》,河北大学出版社.1998.8.

[46]张广全:《*Fuzzy* 数的 *Fuzzy* 距离与 *Fuzzy* 极限》,《模糊系统与数学》,1992,1:21－28.

[47]张文修等:《模糊数学基础》,西安交通大学出版社,1984:90－120.

[48]姜华彪:《关于 *Fuzzy* 级数的若干结果》,《模糊系统与数学》,1987,1:80－89.

[49]赵汝怀:《*Fuzzy* 级数的收敛性》,《模糊数学》,1987,1:37－38.

[50]侯仁恩:《*Fuzzy* 值函数项级数的一致收敛性》,《应用数

学》,1988,4.

[51] *Zhang Guangquan. Fuzzy distance and limit of fuzzy number. BUSEFAL*,1987,33:19－30.

[52]万大成,刘锐:《*Fuzzy* 级数》,《模糊数学》,1984.4.

[53]郭述忠:《区间值函数与模糊值函数的无穷积分》,《模糊系统与数学》,1989,(2):52.

[54]刘宁等:《区间值函数与模糊值函数级数的一致收敛性》,《兰州大学学报》,专辑,1996.

[55]于兴江等:《*Fuzzy* 级数及其收敛性》,《模糊集理论与应用》,河北大学出版社,1998.8.

[56]张宝环等:《*Fuzzy* 数项级数的收敛性》,《模糊集理论与应用》,河北大学出版社,1998.8.

[57]李法朝等:《*Fuzzy* 集序列的极限及其运算法则》,《兰州大学学报》,专辑,1996.214－218.

[58]马生全:《复 *Fuzzy* 数项级数及其收敛性》,《模糊数学与系统》, *Vol*.14.2000.

[59]马生全:《复区间值函数与复模糊值函数级数的一致收敛性》,《辽宁工程技术大学学报》,2001.10, *Vol*.20. *No*.5.

[60] *chang S S L. Zadeh L A. On fuzzy mapping and control. IEEE Trans. Systems Man Cybernet*. (1972)2(1):30－34.

[61] *Mizumoto M. Tanaka K. The four operations fo arithmetic on fuzzy numbers. Systems comput. － Controls*. (1976) 7(5):73－81.

[62] *Nahmias S. Fuzzy variables. FSS*. 1978.1(2):97－111.

[63] *Dubois D, Prade H. Operations on fuzzy numbers. Internat. Jour Systems Sci*. 1978,9(6):613－626.

[64] *Dubois D , Prade H. Towards fuzzy differential calcalus. FSS*. 1982,8(1):1－17;8(2):105－116;8(3):225－233.

[65] *Bezdek J C. Fuzzy Numbers: an overview. The Theory of Fuzzy Information , Vol. 1: Mathematics and Logic, Boca Raton: CRC Press*, 1987.

[66] *Negoita, C. V. Ralescu D. A. Application of Fuzzy Sets to System analysis. New York: wiley*, 1975.

[67] *Goetsehel R. voxman W. A pseudometric for fuzzy sets and certain releated result. JMAA*. 1981.81(2):507:523.

[68] *Albrycht J, Mauoka M. On fuzzy multi－valued. FSS*, 1984,12(1):61－69;1985,15(2):193－197.

[69] *Badard R. Fuzzy Preuniform structures and the structures they induce. JMAA*. 1984,100(2):530－560.

[70] *Badard R. Fixed point theorems for fuzzy numbers. FSS*. 1984,13(3):291－302.

[71] *Badard R. Comparison of topological and uniform structures for fuzzy numbers and the fixed point problem. FSS*, 1987,21(2):211－220.

[72] *Kaleva O. On convergence fo fuzzy sets. FSS*. 1985,15(1):99－100.

[73] 区阳合. *Topological properties of the space of regular*

fuzzy sets. *JMAA*. 1988,129(2):346 - 361.

[74] *Puri M L, Ralescu D A. Differential for fuzzy function*. *JMAA*. 1983,91(2):552 - 558.

[75] *Goetschel R. Voxman W. Eigen fuzzy number* . *FSS*, 1985,16(1):75 - 85.

[76] *Klement E P. Fuzzy measures assumming their values in the set of fuzzy numbers*. *Jour. of Math. Anal. Appl*. 1983, 93 (2);312 - 323.

[77] *Buckley J J. Fuzzy eigen value and imput - output analysis*. *FSS*. 1990,34(2):187 - 195.

[78]杨伦标,高英仪:《模糊数学原理及应用》,华南理工大学出版社,1998.

[79]仇计清等:《复 *Fuzzy* 函数的积分》,《模糊集理论与应用》,河北大学出版社,1998.148 - 151.

[General Information]
[illegible]=[illegible]
[illegible]=[illegible]
[illegible]=243
SS[illegible]=10437846
DX[illegible]=
[illegible]=2001[illegible]12[illegible]1[illegible]
[illegible]=[illegible]